

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE

DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

J. RADON

WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

N. HOFREITER

WIEN

59. BAND, 3. HEFT

(AUSGEGEBEN IM AUGUST 1955)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1955

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

59. Band/3. Heft

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Weier, J. Über unwesentliche eindimensionale Singularitäten	165
Dirac, G. A. Circuits in Critical Graphs.	178
Carlitz, L. The Coefficients of Certain Power Series	188
Nöbauer, W. Gruppen von Restpolynomidealrestklassen nach Primzahl- potenzen	194
Heinhold, J. Zur Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen . .	203
Blanuşă, D. Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume.	217
Hadwiger, H. Konkave Eikörperfunktionale	230
Buchbesprechungen	238

Über unwesentliche eindimensionale Singularitäten.

Von

Josef Weier, Fulda.

(Eingelangt am 24. Januar 1955.)

Wenn S , T Sphären der gleichen Dimension und f , f' stetige Abbildungen von S in T bedeuten, ferner der Abbildungsgrad von f der gleiche wie der von f' ist, so sind f und f' zueinander homotop. Das ist ein bekannter Satz aus der Brouwerschen Theorie des Abbildungsgrades¹. Aus diesem Satz folgt leicht:

Sind U eine offene Vollkugel in dem n -dimensionalen Euklidischen Raum R^n , $n > 0$, und a ein Punkt aus U , weiter g eine stetige Abbildung von $\bar{U}$ in den R^n , a der einzige Fixpunkt von g und der Index von a bei g gleich Null, so gibt es eine stetige Abbildung g' von $\bar{U}$ in den R^n , die keinen Fixpunkt hat und auf $\bar{U} - U$ mit g übereinstimmt. Der Fixpunkt a von g läßt sich also beseitigen.

Bezeichnet man Fixpunkte auch als nulldimensionale Singularitäten und Fixpunkte, die sich in dem vorstehend erklärten Sinne beseitigen lassen, als unwesentlich, so fragt die vorliegende Arbeit in einem sogleich erläuterten Sinne nach den Bedingungen für die Unwesentlichkeit eindimensionaler Singularitäten.

Es seien P ein endliches Euklidisches Polyeder im R^n und $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat, ferner A die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p = f^\tau(p)$. Die Menge A sei ein homogenes endliches 1-dimensionales Polyeder. Diese Annahme wird durch folgenden Approximationssatz, der sich in meiner Arbeit „Endliche Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten“, Mh. Math. **59**, 1–21 (1955), bewiesen findet, gerechtfertigt: Sind F_1 eine Abbildungsschar in P und ε eine positive Zahl, so gibt es eine Abbildungsschar $F_2 = (f_2^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ in P mit $\varrho(F_1, F_2) < \varepsilon$ und den weiteren Eigenschaften:

¹ L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **71**, 97–115 (1912).

jede der Abbildungen f_2^τ hat höchstens endlich viele Fixpunkte, die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p = F_2(p, \tau)$ ist entweder leer oder ein homogenes endliches 1-dimensionales Poleyder.

Eine in A offene Menge B bezeichnen wir als „Singularität“ von F , wenn sie die folgenden Eigenschaften I bis III hat. I. Es ist B zu einer offenen Strecke homöomorph. II. Sind (p_1, τ_1) und (p_2, τ_2) Punkte aus B mit $\tau_1 = \tau_2$, so ist $p_1 = p_2$. III. Ist B' eine in A offene Menge $\supset B$ derart, daß I und II bei Ersetzung von B und B' richtig bleiben, so ist $B = B'$.

An anderer Stelle werde ich beweisen: Sind $A_1, \dots, A_m$ die Singularitäten von F , so ist $A_j \cdot A_k = 0$ für $j \neq k$ und $\sum \bar{A}_i = A$. Zu der Singularität B von F existieren Zahlen β_0, β_1 mit $0 \leq \beta_0 < \beta_1 \leq 1$ und von τ stetig abhängende Punkte $b^\tau, \beta_0 \leq \tau \leq \beta_1$, aus P , so daß B die aus den Punkten

$$(b^\tau, \tau) \text{ des } R^{n+1} \text{ mit } \beta_0 < \tau < \beta_1$$

bestehende Menge ist. Wir bezeichnen B auch mit $(b^\tau, \beta_0 < \tau < \beta_1)$. Dann gibt es eine ganze Zahl ζ , den „Grad“ von B bei F , derart, daß für $\beta_0 < \tau < \beta_1$ der Punkt b^τ bei f^τ den Index ζ hat.

Wir nennen F auch eine „endliche Abbildungsschar“. Alsdann werde die „Unwesentlichkeit“ einer Singularität von F bestimmt durch folgende

Definition. Sind $A_1, \dots, A_m$ die Singularitäten von F , so heißt A_1 eine „unwesentliche Singularität“ von F , wenn zu jeder offenen Menge $U \supset \bar{A}_1$ des R^{n+1} und jeder positiven Zahl ε eine endliche Abbildungsschar G in P existiert mit den Eigenschaften: für $(p, \tau) \in U$ ist $F(p, \tau) = G(p, \tau)$; die Entfernung $\varrho(F, G)$ ist $< \varepsilon$; wenn $m = 1$, hat G keine Singularität; wenn $m > 1$, sind $A_2, \dots, A_m$ die Singularitäten von G und die Grade dieser Singularitäten bei G beziehungsweise die gleichen wie bei F .

In der vorliegenden Arbeit wird unter anderem gezeigt: Wenn P eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 und B eine Singularität von F mit dem Grad Null bedeuten, so ist B unwesentlich. Der letzte Satz gilt, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, in Dimensionen > 2 nicht mehr einschränkungslos.

1. Hilfssätze.

Den in diesem Abschnitt hergeleiteten Sätzen kommt keine selbständige Bedeutung zu. Sie bereiten nachfolgende Beweise vor. — Die Entfernung zweier Punkte a, b des R^n ist mit $\varrho(a, b)$ bezeichnet. Mit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ bedeutet $a + b$ den Punkt $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ und $\overline{ab} = b - a$ den Punkt $(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$.

Ist γ irgendeine Zahl, so bezeichnet (a, γ) den Punkt $(\gamma_1, \dots, \alpha_n, \gamma)$ des R^{n+1} . Ordnet die Abbildung f jedem Punkt p einer Menge genau einen Punkt einer anderen Menge zu, so bedeutet $f(p)$ den letzteren Punkt, nicht aber die ganze Abbildung.

Hilfssatz 1. *Es seien V eine offene n -dimensionale Vollkugel im R^n , $n > 0$, und q ein Punkt aus V ; ferner $(q_i^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \dots, m$, Kurven von Punkten q_i^τ aus V mit den Eigenschaften: für $0 \leq \tau \leq 1$ sind die Punkte $q_1^\tau, \dots, q_m^\tau$ paarweise verschieden; für $i = 1, \dots, m$ ist $q_i^1 = q$. Für $p \in \bar{V} - q$ bezeichne $h(p)$ die Projektion von p auf $\bar{V} - V$ aus q . Dann gibt es eine halboffene Schar $(h^\tau, 0 \leq \tau < 1)$ topologischer Abbildungen h^τ von $\bar{V}$ in sich mit den folgenden Eigenschaften: h^0 ist die Identität; für $0 \leq \tau < 1$ ist $h^\tau(V)$ eine offene n -dimensionale Vollkugel V^τ ; für $\tau_1 < \tau_2$ ist $V^{\tau_1} \supset V^{\tau_2}$; für τ gegen 1 ist $\lim V^\tau = q$; in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}^\tau - V^\tau$ und $0 \leq \tau < 1$ ist $h^{-\tau}(p) = h(p)$; für $0 \leq \tau < 1$ und $i = 1, \dots, m$ ist $h^\tau(q_i^0) = q_i^\tau$.*

Beweis. Man kann annehmen, q sei der Mittelpunkt von V . Wie man sich leicht überlegt, gibt es Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ und n -dimensionale Vollkugeln U^k , $k = 0, 1, \dots$, U_i^k , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots$, im R^n mit den Eigenschaften:

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots, \lim \alpha_k = 1, U^0 = V, \lim U^k = q,$$

für alle k ist $\bar{U}_1^k + \dots + \bar{U}_m^k + \bar{U}^{k+1} \subset U^k$ und q der Mittelpunkt von U^k , für alle (i_1, i_2, k) mit $i_1 \neq i_2$ ist $\bar{U}_{i_1}^k \cdot \bar{U}_{i_2}^k = 0$,

$$q_i^\tau \in U_i^k$$

für alle (i, k, τ) mit $i = 1, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots$ und $\alpha_{k-1} \leq \tau \leq \alpha_k$.

Bezeichnet j eine der Zahlen $0, 1, \dots$, so machen wir die für $j = 0$ richtige Annahme, es sei bereits eine Schar $(h_j^\tau, 0 \leq \tau \leq \alpha_j)$ topologischer Abbildungen h_j^τ von $\bar{V}$ in sich erklärt, über die mit $V^\tau = h_j^\tau(V)$ gilt:

I_j. Es ist h_j^0 die Identität und $V^{\alpha_j} = U^j$.

II_j. Für $0 \leq \tau \leq \alpha_j$ ist V^τ eine offene n -dimensionale Vollkugel. Für $\tau_1 < \tau_2$ ist $V^{\tau_1} \supset V^{\tau_2}$.

III_j. In allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}^\tau - V^\tau$ und $0 \leq \tau \leq \alpha_j$ ist $h^{-\tau}(p) = h(p)$.

IV_j. Für $i = 1, \dots, m$ und $0 \leq \tau \leq \alpha_j$ ist $h^\tau(q_i^0) = q_i^\tau$.

Aus $\bar{U}_1^{j+1} + \dots + \bar{U}_m^{j+1} \subset U^{j+1}$ folgt die Existenz einer offenen n -dimensionalen Vollkugel U_0^{j+1} , die q zum Mittelpunkt hat und über die

$$\bar{U}_1^{j+1} + \dots + \bar{U}_m^{j+1} \subset U_0^{j+1} \text{ sowie } \bar{U}_0^{j+1} \subset U_{j+1}$$

gilt.

Dann gibt es zunächst eine Schar $(f^\tau, \alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1})$ topologischer Abbildungen f^τ von $\bar{U}^j$ in sich, über die, wenn $V^\tau = f^\tau(U^j)$ für $\alpha_j < \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist, gilt:

I $_{j+1}^1$. Es ist f^{α_j} die Identität und $V^{\alpha_{j+1}} = U^{j+1}$.

II $_{j+1}^1$. Für $\alpha_j < \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist V^τ eine offene n -dimensionale Vollkugel, ferner $V^{\tau_1} \supset \bar{V}^{\tau_2}$ für $\tau_1 < \tau_2$.

III $_{j+1}^1$. In allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}^\tau - V^\tau$ und $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist $f^{-\tau}(p)$ die Projektion von p auf $\bar{U}^j - U^j$ aus q .

IV $_{j+1}^1$. In allen (p, τ) mit $p \in \bar{U}_0^{j+1}$ und $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist $f^\tau(p) = p$.

Weiter existiert für $i = 1, \dots, m$ eine Schar $(f_i^\tau, \alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1})$ topologischer Abbildungen f_i^τ von $\bar{U}_i^{j+1}$ auf sich mit den Eigenschaften: in allen (p, τ) , für die entweder $p \in \bar{U}_i^{j+1}$ und $\tau = \alpha_j$ oder $p \in \bar{U}_i^{j+1} - U_i^{j+1}$ und $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$, ist $f_i^\tau(p) = p$; für $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist $f_i^\tau(p_i^{\alpha_j}) = p_i^\tau$.

Bedeutet dann g^τ für $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$ die durch $g^\tau(p) = f^\tau(p)$, $p \in \bar{U}^j - \Sigma U_i^{j+1}$, und $g^\tau(p) = f_i^\tau(p)$, $p \in \bar{U}_i^{j+1}$, bestimmte topologische Abbildung von $\bar{U}^j$ in sich, so gilt:

I $_{j+1}^2$. Es ist g^{α_j} die Identität.

II $_{j+1}^2$. Für $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist $g^\tau(U^j) = V^\tau$.

III $_{j+1}^2$. In allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}^\tau - V^\tau$ und $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist $g^{-\tau}(p)$ die Projektion von p auf $\bar{U}^j - U^j$ aus q .

IV $_{j+1}^2$. Für $i = 1, \dots, m$ und $\alpha_j \leq \tau \leq \alpha_{j+1}$ ist $g^\tau(q_i^{\alpha_j}) = q_i^\tau$.

Hierauf sei $h_{j+1}^\tau = h_j^\tau$ für $0 \leq \tau \leq \alpha_j$, in den Punkten (p, τ) mit $p \in \bar{V}$ und $\alpha_j < \tau \leq \alpha_{j+1}$ weiter

$$h_{j+1}^\tau(p) = g^\tau h_j^{\alpha_j}(p).$$

Von der so erklärten Abbildungsschar $(h_{j+1}^\tau, 0 \leq \tau \leq \alpha_{j+1})$ gilt, wie man sofort bestätigt, I $_{j+1}$ bis IV $_{j+1}$.

Ist schließlich $h^\tau = h_i^\tau$ für $0 \leq \tau \leq \alpha_i$ und $i = 0, 1, \dots$, so stellt, da $h_{i+1}^\tau = h_i^\tau$ für $0 \leq \tau \leq \alpha_i$ ist, $(h^\tau, 0 \leq \tau < 1)$ eine halboffene Abbildungsschar der verlangten Art da, wie aus den I $_i$ bis IV $_i$, $i=0, 1, \dots$, folgt.

Hilfssatz 2. Es seien die Bedeutung von V, q, q_i^τ, m und n die in Hilfssatz 1 erklärte; weiter f eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in den R^n und $q_1^0, \dots, q_m^0$ die Fixpunkte von f ; ferner $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n , so daß: $f^0(p) = f(p)$ für $p \in \bar{V} - V$, $p \neq f^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$, der Punkt q der einzige Fixpunkt von f^1 ist. Dann gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\bar{V}$ in den R^n , über die gilt: $g^0 = f$ und $g^1 = f^1$;

in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $g^\tau(p) = f^\tau(p)$; für $0 \leq \tau < 1$ sind die Punkte $q_1^\tau, \dots, q_m^\tau$ die Fixpunkte von g^τ .

Beweis. Die Bedeutung von h^τ und V^τ , $0 \leq \tau < 1$, sei die in Hilfsatz 1 erklärte. Man kann annehmen, daß q der Mittelpunkt von V ist. Für $p \in \bar{V} - q$ bezeichne $h(p)$ die Projektion von p auf $\bar{V} - V$ aus q . Ferner seien W^τ , $0 \leq \tau < 1$, von τ stetig abhängende offene n -dimensionale Vollkugeln mit den Eigenschaften: $W^0 = V^0 = V$, für $0 < \tau < 1$ ist $\bar{V}^\tau \subset W^\tau$ und $\bar{W}^\tau \subset V$, für τ gegen 1 ist $\lim W^\tau = q$.

Es sei $\lambda(p, \tau) = \tau \varrho(p, \bar{V} - V) / (\varrho(p, \bar{V} - V) + \varrho(p, \bar{W}^\tau - W^\tau))$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V} - W^\tau$ und $0 < \tau < 1$.

Weiter sei $\mu(p, \tau) = \tau \varrho(p, \bar{V}^\tau - V^\tau) / (\varrho(p, \bar{W}^\tau - W^\tau) + \varrho(p, \bar{V}^\tau - V^\tau))$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{W}^\tau - V^\tau$ und $0 < \tau < 1$.

Bedeutet dann ζ eine Zahl aus dem offenen Intervall $(0, 1)$, so bestimmen wir den Punkt $g^\zeta(p)$ durch

$$g^\zeta(p) = p + (1 - \lambda(p, \zeta)) \overrightarrow{h(p) f^\zeta h(p)} \quad \text{für } p \in \bar{V} - W^\zeta, \quad (1)$$

$$g^\zeta(p) = p + (1 - \zeta) \overrightarrow{h(p) f^{\mu(p, \zeta)} h(p)} \quad \text{für } p \in W^\zeta - \bar{V}^\zeta, \quad (2)$$

$$g^\zeta(p) = p + (1 - \zeta) \overrightarrow{h^{-\zeta}(p) f h^{-\zeta}(p)} \quad \text{für } p \in \bar{V}^\zeta. \quad (3)$$

Es sei $g^0 = f$ und $g^1(q) = q$; ferner

$$g^1(p) = p + (1 - \tau) \overrightarrow{h(p) f^1 h(p)}, \quad (4)$$

wenn p ein Punkt aus $\bar{V} - q$ mit $p = q + (1 - \tau) \overrightarrow{q h(p)}$ ist.

In allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}$ und $0 \leq \tau \leq 1$ bezeichnen wir den Punkt $g^\tau(p)$ auch mit $G(p, \tau)$. Zum Beweis, daß die Abbildung G in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}$ und $0 < \tau < 1$ stetig ist, genügt es, die Stetigkeit der Abbildung g^ζ nachzuweisen: Für $p \in \bar{W}^\zeta - W^\zeta$ ist $\lambda(p, \zeta) = \zeta$ und $\mu(p, \zeta) = \zeta$. Somit schließt (1) stetig an (2) an. Für $p \in \bar{V}^\zeta - V^\zeta$ ist $h(p) = h^{-\zeta}(p)$ und $\mu(p, \zeta) = 0$, ferner ist $f(p) = f^0(p)$ für $p \in \bar{V} - V$. Somit schließt (2) stetig an (3) an.

Zum Beweis, daß G in den Punkten $(p, 0)$ mit $p \in \bar{V}$ stetig ist, braucht es nur den Nachweis, daß in (1) bis (3) der Punkt $g^\zeta(p)$ für ζ gegen 0 in den Punkt $f(p)$ übergeht. In (1) geht $\bar{V} - W^\zeta$ in $\bar{V} - V$, $\lambda(p, \zeta)$ in 0, $h(p)$ in p und $f^\zeta(p)$ in $f^0(p) = f(p)$ über. In (2) geht $W^\zeta - \bar{V}^\zeta$ in $\bar{V} - V$, $\mu(p, \zeta)$ in 0 und $h(p)$ in p über. In (3) geht $h^{-\zeta}(p)$ in p über.

Für ζ gegen 1 geht W^ζ gegen q und in (2) sowie (3) der Punkt $g^\zeta(p)$ gegen den Punkt p . Zum Beweis, daß G in den Punkten $(p, 1)$ mit $p \in \bar{V}$ stetig ist, genügt daher der Nachweis, daß (1) für ζ gegen 1 in (4) übergeht: Ist p ein Punkt aus $\bar{V} - W^\zeta$, so strebt die Zahl $\lambda(p, \zeta)$ für ζ gegen 1

der Zahl $\lambda_p^1 = \varrho(p, \bar{V} - V) / (\varrho(p, \bar{V} - V) + \varrho(p, q))$ zu. Die Zahl λ_p^1 und die durch $p = q + (1 - \lambda_p^2) \overrightarrow{qh(p)}$ bestimmte Zahl λ_p^2 sind aber, wie man leicht bestätigt, gleich. Somit ergibt ein Vergleich von (1) und (4) bereits die Behauptung.

Die Punkte $q_1^\zeta, \dots, q_m^\zeta$ sind die Fixpunkte von g^ζ : Für $p \in \bar{V} - V^\zeta$ ist $g^\zeta(p) = p + \alpha \overrightarrow{h(p) f^\beta h(p)}$, wobei $\alpha > 0$ und $0 \leq \beta \leq 1$. Somit ist $p \neq g^\zeta(p)$, da $p' \neq f^\tau(p')$ für alle (p', τ) mit $p' \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$. Der Punkt q_i^ζ liegt in V^ζ , und es ist $h^{-\zeta}(q_i^\zeta) = q_i$, daher $g^\zeta(q_i^\zeta) = q_i^\zeta$. Ist a ein Punkt aus V^ζ mit $a = g^\zeta(a)$, so ist $fh^{-\zeta}(a) = h^{-\zeta}(a)$, also $h^{-\zeta}(a)$ einer der Punkte $q_1, \dots, q_m$ und daher a einer der Punkte $q_1^\zeta, \dots, q_m^\zeta$.

Fast ebenso wie Hilfssatz 2 beweist man:

Hilfssatz 3. *Es seien V eine offene n -dimensionale Vollkugel im R^n , $n > 0$; und f eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in den R^n ohne Fixpunkte; ferner $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n , so daß: $f^0(p) = f(p)$ für $p \in \bar{V} - V$, $p \neq f^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$, f^1 genau einen Fixpunkt hat. Dann gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\bar{V}$ in den R^n , über die gilt: $g^0 = f$ und $g^1 = f^1$; in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $g^\tau(p) = f^\tau(p)$; für $0 \leq \tau < 1$ hat g^τ keinen Fixpunkt.*

Aus Hilfssatz 3 folgt leicht:

Hilfssatz 4. *Es seien V eine offene n -dimensionale Vollkugel im R^n , $n > 0$, und $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n , über die gilt: in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $p \neq f^\tau(p)$; die Abbildung f^0 hat genau einen Fixpunkt, und dieser ist vom Index Null; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt. Dann gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\bar{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: in allen (p, τ) , für die entweder $p \in \bar{V}$ und $\tau = 0, 1$ oder $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$, ist $f^\tau(p) = g^\tau(p)$; für $0 < \tau < 1$ ist die Abbildung g^τ ohne Fixpunkte.*

Schließlich wollen wir zeigen:

Hilfssatz 5. *Es seien V eine offene 2-dimensionale Vollkugel im R^2 ; ferner A die Menge aller Punkte (p, τ) des R^3 , für die entweder $p \in \bar{V}$ und $\tau = 0, 1$ oder $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist; und $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^2 , so daß $p \neq f^\tau(p)$ für alle Punkte (p, τ) aus A . Dann gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\bar{V}$ in den R^2 mit den Eigenschaften: für alle Punkte (p, τ) aus A ist $f^\tau(p) = g^\tau(p)$, es ist $p \neq g^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{V}$ und $0 \leq \tau \leq 1$.*

Beweis. Die Menge A ist eine 2-Sphäre, und mit $F(p, \tau) = f^\tau(p)$ stellt F eine nullstellenfreie stetige Abbildung von A in den R^2 dar. Bedeutet q den Nullpunkt des R^2 , so ist, wie man sich leicht überlegt oder aus dem bekannten Satz, daß das in einer 1-Sphäre gelegene stetige Bild einer 2-Sphäre dort nullhomotop ist², herleitet, $F(A)$ innerhalb $R^2 - q$ auf einen Punkt zusammenziehbar. Hieraus folgt bereits die Behauptung.

2. Isolierte Singularitäten.

Für diesen und den nächsten Abschnitt bedeute P eine endliche Euklidische Mannigfaltigkeit einer Dimension > 0 im R^n .

Sind q^τ , $\alpha_0 \leq \tau \leq \alpha_1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P und $A = (q^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$ eine Singularität der zu P gehörigen endlichen Abbildungsschar F , ferner (q, α) einer der beiden Punkte (q^{α_0}, α_0) und (q^{α_1}, α_1) , so nennen wir (q, α) einen „Endpunkt“ von A oder F . Ist U eine offene Menge im R^{n+1} , die den Punkt (q, α) enthält, und ist $B \cdot \bar{U} = 0$ für jede Singularität $B \neq A$ von F , so bezeichnen wir (q, α) als einen „isolierten Endpunkt“ von A oder F . Eine Singularität von F , so daß jeder der beiden Endpunkte dieser Singularität isoliert ist, nennen wir eine „isolierte Singularität“ von F . Man bestätigt leicht: die Singularität A von F ist genau dann isoliert, wenn eine $\bar{A}$ enthaltende offene Menge U im R^{n+1} existiert derart, daß jede Singularität $B \neq A$ von F zu $\bar{U}$ fremd ist.

Singularitäten vom Grad Null lassen sich durch kleine Deformationen in isolierte Singularitäten überführen:

Satz 1. Es seien F eine endliche Abbildungsschar in P und $A_1, \dots, A_m$ die Singularitäten von F , der Grad von A_1 bei F gleich Null, (q, α) ein nicht isolierter Endpunkt von A_1 , U eine Umgebung von (q, α) und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine endliche Abbildungsschar G in P , deren Singularitäten sich derart mit $B_1, \dots, B_m$ bezeichnen lassen, daß gilt: für $(p, \tau) \in U$ ist $F(p, \tau) = G(p, \tau)$; die Entfernung $\varrho(F, G)$ ist $< \varepsilon$; $A_1 \supset B_1$, für $i = 2, \dots, m$ ist $A_i = B_i$; für $i = 1, \dots, m$ ist der Grad von A_i bei F gleich dem Grad von B_i bei G ; die Anzahl der isolierten Endpunkte von B_1 ist größer als die von A_1 .

Beweis. Wenn $A_1 = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$, so kann man annehmen, daß $q = \lim a^\tau$, τ gegen α_0 , und $\alpha = \alpha_0$ ist. Es sei $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$.

Dann gibt es, wie leicht als der Endlichkeit von F folgt, in P offene Mengen V, W und eine Zahl β mit $\alpha < \beta < \alpha_1$ sowie Kurven $(b_i^\tau, \alpha \leq \tau \leq \beta)$,

² H. Hopf, Vom Bolzanoschen Nullstellensatz zur algebraischen Homotopie theorie der Sphären. Jahresbericht d. D. M. V., 56, 59–76 (1953), Abschnitt 4.

$i = 1, \dots, \mu$, von Punkten b_i^τ aus P mit den Eigenschaften: der Durchmesser von W ist $< \varepsilon$; der Punkt q liegt in V und ist der einzige Fixpunkt von f^α auf $\bar{V}$; es ist $\bar{V} + f^\tau(\bar{V}) \subset W$ für $\alpha \leq \tau \leq \beta$; die Menge aller Punkte (p, τ) mit $p \in V$ und $\alpha < \tau < \beta$ liegt in U ; für alle (p, τ) mit $p \in \bar{V} - V$ und $\alpha \leq \tau \leq \beta$ ist $p \neq f^\tau(p)$; es existiert eine topologische Abbildung t von W auf den R^r , die V in eine offene r -dimensionale Vollkugel des R^r überführt, wobei r die Dimension von P bezeichnet; für $i = 1, \dots, \mu$ ist $b_i^\alpha = q$; für $\alpha < \tau \leq \beta$ sind die Punkte $b_1^\tau, \dots, b_\mu^\tau$ paarweis verschieden, in V gelegen und die Fixpunkte von f^τ auf $\bar{V}$; für $\alpha < \tau \leq \beta$ ist $a^\tau = b_1^\tau$.

Nun seien $\gamma, \gamma_0, \gamma_1$ Zahlen mit $\alpha < \gamma_0 < \gamma < \gamma_1 < \beta$ und X eine in $P \cdot V$ offene Menge, so daß gilt: für $\gamma_0 \leq \tau \leq \gamma_1$ ist $a^\tau \in X$ der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\bar{X}$, die Menge $t(X)$ ist eine offene r -dimensionale Vollkugel.

Es bedeute X_0 die Menge aller Punkte (p, τ) mit $p \in X$ und $\gamma_0 < \tau < \gamma_1$. Nach Hilfssatz 4 gibt es dann eine Schar $G_1 = (g_1^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g_1^τ von P in sich mit den Eigenschaften: für $(p, \tau) \in X_0$ ist $F(p, \tau) = G_1(p, \tau)$, für $\gamma_0 \leq \tau \leq \gamma_1$ ist $g_1^\tau(\bar{X}) \subset W$, für $\gamma_0 < \tau < \gamma_1$ besitzt g_1^τ auf $\bar{X}$ keinen Fixpunkt.

Bezeichnet V_0 die Menge aller Punkte (p, τ) mit $p \in V$ und $\alpha < \tau < \gamma$, so ist $g_1^\tau(p) \in W$ für $(p, \tau) \in \bar{V}_0$. In allen (p, τ) mit $p \in \bar{V} - V$ und $\alpha \leq \tau \leq \gamma$ ist $p \neq g_1^\tau(p)$. Der Punkt q ist der einzige Fixpunkt von g_1^α auf $\bar{V}$. Die Abbildung g_1^γ hat genau dann Fixpunkte auf $\bar{V}$, wenn $\mu > 1$; im letzteren Fall sind die Punkte $b_2^\gamma, \dots, b_\mu^\gamma$ die in $\bar{V}$ gelegenen Fixpunkte von g_1^γ und die Indexe dieser Fixpunkte bei g_1^γ die gleichen wie bei f^γ . Für alle (τ, i) mit $\alpha < \tau \leq \gamma$ und $i = 2, \dots, \mu$ ist $b_i^\tau \in V$.

Hierauf existiert nach den Hilfssätzen 2 und 3 eine Schar $(g_2^\tau, \alpha \leq \tau \leq \gamma)$ stetiger Abbildungen g_2^τ von P in sich mit den Eigenschaften: für $(p, \tau) \in V_0$ ist $g_2^\tau(p) = g_1^\tau(p)$; wenn $\mu = 1$, hat für $\alpha < \tau \leq \gamma$ die Abbildung g_2^τ auf $\bar{V}$ keinen Fixpunkt; wenn $\mu > 1$, sind für $\alpha < \tau \leq \gamma$ die Punkte $b_2^\tau, \dots, b_\mu^\tau$ die Fixpunkte von g_2^τ .

In den Punkten (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$ sei alsdann: $g^\tau(p) = g_1^\tau(p)$ für $(p, \tau) \in V_0$ und $g^\tau(p) = g_2^\tau(p)$ für $(p, \tau) \in \bar{V}_0$. Statt $g^\tau(p)$ schreiben wir auch $G(p, \tau)$, so daß also $G = (g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ ist.

Zum Beweis, daß $F(p, \tau) = G(p, \tau)$ für $(p, \tau) \in U$, bedeute (p_1, τ_1) einen Punkt $\in U$. Wegen $V_0 \subset U$ ist dann $G(p_1, \tau_1) = G_1(p_1, \tau_1)$. Wegen $G_1(p, \tau) = F(p, \tau)$, $(p, \tau) \in X_0$, und $X_0 \subset U$ ist $G_1(p_1, \tau_1) = F(p_1, \tau_1)$, daher die Behauptung richtig.

Zum Beweis, daß $\varrho(F, G) < \varepsilon$, bedeute (p_1, τ_1) einen Punkt mit $p_1 \in P$ und $0 \leq \tau_1 \leq 1$. Ist dann $F(p_1, \tau_1) \neq G(p_1, \tau_1)$, so liegt $F(p_1, \tau_1)$

und ebenso $G(p_1, \tau_1)$ in W . Also ist, da W einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat die Entfernung $\varrho(F(p_1, \tau_1), G(p_1, \tau_1)) < \varepsilon$.

Die übrigen von G verlangten Eigenschaften ergeben sich fast unmittelbar aus der Erklärung von G .

Aus Satz 1 folgt:

Satz 2. Sind F eine endliche Abbildungsschar in P und $A_1, \dots, A_m$ die Singularitäten von F , der Grad von A_1 bei F gleich Null, U eine Umgebung von $\bar{A}_1$ und ε eine positive Zahl, so gibt es eine endliche Abbildungsschar G in P , deren Singularitäten sich derart mit $B_1, \dots, B_m$ bezeichnen lassen, daß gilt: für $(p, \tau) \in U$ ist $F(p, \tau) = G(p, \tau)$, die Entfernung $\varrho(F, G)$ ist $< \varepsilon$; $A_1 \supset B_1$, für $i = 2, \dots, m$ ist $A_i = B_i$; für $i = 1, \dots, m$ ist der Grad von A_i bei F gleich dem Grad von B_i bei G ; die Singularität A_1 ist isoliert.

3. Unwesentliche Singularitäten in zwei Dimensionen.

Auf die eingangs gestellte Frage nach Bedingungen für die Unwesentlichkeit einer Singularität wollen wir im vorliegenden Abschnitt eine Antwort geben. Wir werden zeigen, daß wenigstens in 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten Singularitäten mit dem Grad Null unwesentlich sind. Zunächst ein Satz über isolierte Singularitäten:

Satz 3. Es seien P von der Dimension 2; F eine endliche Abbildungsschar in P ; A eine isolierte Singularität von F ; der Grad von A bei F gleich Null; U eine Umgebung von $\bar{A}$, so daß jede Singularität $\neq A$ von F zu $\bar{U}$ fremd ist; und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine endliche Abbildungsschar G in P mit den Eigenschaften: für $(p, \tau) \in U$ ist $F(p, \tau) = G(p, \tau)$, für $(p, \tau) \in \bar{U}$ ist $p \neq G(p, \tau)$, die Entfernung $\varrho(F, G)$ ist $< \varepsilon$.

Beweis. Es seien $a^\tau, \alpha_0 \leq \tau \leq \alpha_1$, von τ stetig abhängende Punkte aus P , so daß $A = (a^\tau, \alpha_0 < \tau < \alpha_1)$. Dann existieren, wie man sich leicht überlegt, in P offene Mengen $U_0, \dots, U_m, V_0, \dots, V_m, m > 1$, sowie Zahlen $\beta_0, \dots, \beta_{m+1}$ mit den Eigenschaften:

$$\alpha_0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{m+1} = \alpha_1; \quad (5)$$

in allen (τ, i) mit $\beta_i \leq \tau \leq \beta_{i+1}$ und $i = 0, \dots, m$ ist $a^\tau \in U_i$ der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\bar{U}_i$ und

$$\bar{U}_i + f^\tau(\bar{U}_i) \subset V_i; \quad (6)$$

der Durchmesser von V_i ist $< \varepsilon$; man kann V_i derart topologisch auf den R^2 abbilden, daß dabei U_i in eine offene Vollkugel übergeht; bedeutet U_i^0 die Menge aller (p, τ) mit $p \in U_i$ und $\beta_i < \tau < \beta_{i+1}$, so ist $\Sigma U_i^0 \subset U$.

Aus (6), der Stetigkeit von f^τ , der Kompaktheit von $\bar{U}_i$ und der Offenheit von V_i folgt die Existenz einer positiven Zahl δ derart, daß

$$q \in V_i \quad (7)$$

für jeden Punkt q aus P , zu dem wenigstens ein Punkt (p, τ) existiert mit $p \in \bar{U}_i$, $\beta_i \leq \tau \leq \beta_{i+1}$ und $\varrho(f^\tau(p), q) < \delta$.

Man bestätigt leicht, daß es in P offene Mengen $W_1, \dots, W_m$, $X_1, \dots, X_m$ und Zahlen γ_{ik} , $i = 1, \dots, m$, $k = 0, 1$, gibt mit den Eigenschaften:

$$\beta_{i-1} < \gamma_{i0} < \beta_i < \gamma_{i1} < \beta_{i+1} \quad \text{für } i = 1, \dots, m; \quad (8)$$

in allen (τ, i) mit $\gamma_{i0} \leq \tau \leq \gamma_{i1}$ und $i = 1, \dots, m$ ist $a^\tau \in W_i$ der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\bar{W}_i$ und

$$\bar{W}_i + f^\tau(\bar{W}_i) \subset X_i; \quad (9)$$

der Durchmesser von X_i ist $< \min(\delta, \varepsilon)$; man kann X_i derart topologisch auf den R^2 abbilden, daß dabei W_i in eine offene Vollkugel übergeht; bedeutet W_i^0 die Menge aller Punkte (p, τ) des R^{n+1} mit $p \in W_i$ und $\gamma_{i0} < \tau < \gamma_{i1}$, so sind die Mengen W_i^0 paarweis zueinander fremd, und es ist $\Sigma W_i^0 \subset U$.

Wegen Hilfssatz 4 gibt es dann eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g_1^τ von P in sich mit den Eigenschaften: für $(p, \tau) \in \Sigma W_i^0$ ist $g_1^\tau(p) = f^\tau(p)$; für alle (τ, i) mit $\gamma_{i0} \leq \tau \leq \gamma_{i1}$ und $i = 1, \dots, m$ ist

$$g_1^\tau(\bar{W}_i) \subset X_i; \quad (10)$$

ist (p, τ) ein Punkt aus $\bar{U}$ mit $p = g_1^\tau(p)$, so ist τ in

$$[\alpha_0, \alpha_1] - \Sigma(\gamma_{i0}, \gamma_{i1}) \quad (11)$$

gelegen und $p = a^\tau$.

Zum Beweis, daß

$$g_1^\tau(\bar{U}_i) \subset V_i \quad (12)$$

für alle (τ, i) mit $\beta_i \leq \tau \leq \beta_{i+1}$ und $i = 0, \dots, m$, bedeute j eine der Zahlen $0, \dots, m$ und (p, τ) einen Punkt mit $p \in \bar{U}_j$ und $\beta_j \leq \tau \leq \beta_{j+1}$. Wenn $(p, \tau) \in \Sigma W_i^0$, ist $f_1^\tau(p) = f^\tau(p)$, daher $g_1^\tau(p) \in V_j$ nach (6). Ist $(p, \tau) \in W_k^0$, so liegen die Punkte $f^\tau(p)$ und $g_1^\tau(p)$ in X_k . Daher ist $\varrho(f^\tau(p), g_1^\tau(p)) < \delta$ und somit $g_1^\tau(p) \in V_j$ nach (7).

Für $i = 1, \dots, m-1$ gilt: in allen (p, τ) , für die entweder $p \in \bar{U}_i$ und $\tau = \beta_i, \beta_{i+1}$ oder $p \in \bar{U}_i - U_i$ und $\beta_i \leq \tau \leq \beta_{i+1}$, ist $p \neq g_1^\tau(p)$. Eine Anwendung von Hilfssatz 5 ergibt daher eine Schar $G_2 = (g_2^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g_2^τ von P in sich mit den Eigenschaften: es ist

$$g_2^\tau(p) = g_1^\tau(p) \quad \text{für } (p, \tau) \in U_1^0 + \dots + U_{m-1}^0, \quad (13)$$

$$p \neq g_2^\tau(p) \quad \text{für } (p, \tau) \in \bar{U}_1^0 + \dots + \bar{U}_{m-1}^0, \quad (14)$$

$$g_2^\tau(\bar{U}_i) \subset V_i \quad (15)$$

für alle (τ, i) mit $\beta_i \leq \tau \leq \beta_{i+1}$ und $i = 1, \dots, m-1$.

Dann gilt: für $(p, \tau) \in U$ ist $g_2^\tau(p) = f^\tau(p)$; ist (p, τ) ein Punkt aus $\bar{U}$ mit $p = g_2^\tau(p)$, so ist τ in

$$[\beta_0, \beta_1] + [\beta_m, \beta_{m+1}] \quad (16)$$

gelegen und $p = a^\tau$; es ist

$$g_2^\tau(\bar{U}_0) \subset V_0 \quad \text{für } \beta_0 \leq \tau \leq \beta_1, \quad (17)$$

$$g_2^\tau(\bar{U}_m) \subset V_m \quad \text{für } \beta_m \leq \tau \leq \beta_{m+1}; \quad (18)$$

die Entfernung $\varrho(F, G_2)$ ist $< \varepsilon$.

Nunmehr existieren, wie man sich leicht klar macht, Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_m, \gamma_{m+1}$ mit den Eigenschaften I bis IV. I. Wenn $\beta_0 = 0$, ist $\gamma_0 = 0$. Wenn $\beta_0 > 0$, ist $0 < \gamma_0 < \beta_0$. Wenn $\beta_{m+1} = 1$, ist $\gamma_{m+1} = 1$. Wenn $\beta_{m+1} < 1$, ist $\beta_{m+1} < \gamma_{m+1} < 1$. Es ist $\beta_1 < \gamma_1 < \gamma_m < \beta_m$. II. Die Menge aller (p, τ) , für die entweder $p \in \bar{U}_0$ und $\gamma_0 \leq \tau \leq \gamma_1$ oder $p \in \bar{U}_m$ und $\gamma_m \leq \tau \leq \gamma_{m+1}$, ist in U gelegen. III. In allen (p, τ) , für die entweder $p \in \bar{U}_0 - U_0$ und $\gamma_0 \leq \tau \leq \gamma_1$ oder $p \in \bar{U}_0$ und $\tau = \gamma_1$ oder $p \in U_m$ und $\tau = \gamma_m$ oder $p \in \bar{U}_m - U_m$ und $\gamma_m \leq \tau \leq \gamma_{m+1}$, ist

$$p \neq g_2^\tau(p). \quad (19)$$

Wenn $\gamma_0 = 0$, ist a^0 der einzige Fixpunkt von $g_2^{\gamma_0}$ auf $\bar{U}_0$. Wenn $\gamma_0 > 0$, hat $g_2^{\gamma_0}$ auf $\bar{U}_0$ keinen Fixpunkt. Wenn $\gamma_{m+1} = 1$, ist a^1 der einzige Fixpunkt von $g_2^{\gamma_{m+1}}$ auf $\bar{U}_m$. Wenn $\gamma_{m+1} < 1$, hat $g_2^{\gamma_{m+1}}$ auf $\bar{U}_m$ keinen Fixpunkt. IV. Es ist

$$f^\tau(\bar{U}_0) + g_2^\tau(\bar{U}_0) \subset V_0, f^\tau(\bar{U}_m) + g_2^\tau(\bar{U}_m) \subset V_m \quad (20)$$

für $\gamma_0 \leq \tau \leq \gamma_1$ beziehungsweise $\gamma_m \leq \tau \leq \gamma_{m+1}$.

Bezeichne nun $g_3^{\gamma_0}$ eine fixpunktfreie stetige Abbildung von $\bar{U}_0$ in V_0 , so daß $g_3^{\gamma_0}(p) = g_2^{\gamma_0}(p)$ für $p \in \bar{U}_0 - U_0$. Falls $\gamma_0 > 0$, sei $g_3^{\gamma_0} = g_2^{\gamma_0} | \bar{U}_0$. In allen (p, τ) , für die entweder $p \in \bar{U}_0 - U_0$ und $\gamma_0 < \tau \leq \gamma_1$ oder $p \in \bar{U}_0$ und $\tau = \gamma_1$, sei $g_3^\tau(p) = g_2^\tau(p)$. Schreiben wir statt $g_3^\tau(p)$ auch $G_3(p, \tau)$, so ist $p \neq G_3(p, \tau)$ in allen (p, τ) , für die bisher der Punkt $G_3(p, \tau)$ erklärt ist. Nach Hilfssatz 5 kann man G_3 derart stetig über die (p, τ) mit $p \in U_0$ und $\gamma_0 < \tau < \gamma_1$ fortsetzen, daß $p \neq G_3(p, \tau) \in V_0$ für alle (p, τ) mit $p \in \bar{U}_0$ und $\gamma_0 \leq \tau \leq \gamma_1$.

Eine Überlegung, die der im letzten Absatz angestellten ähnlich ist, liefert eine Schar $G_4 = (g_4^\tau, \gamma_m \leq \tau \leq \gamma_{m+1})$ stetiger Abbildungen

g_4^τ von $\bar{U}_m$ in V_m mit den Eigenschaften: in allen (p, τ) , für die entweder $p \in U_m$ und $\tau = \gamma_m$ oder $p \in \bar{U}_m - U_m$ und $\gamma_m \leq \tau \leq \gamma_{m+1}$, ist $g_4^\tau(p) = g_2^\tau(p)$; falls $\gamma_{m+1} < 1$, ist $g_4^{\gamma_{m+1}} = g_2^{\gamma_{m+1}}|_{\bar{U}_m}$; in allen (p, τ) mit $p \in \bar{U}_m$ und $\gamma_m \leq \tau \leq \gamma_{m+1}$ ist $p \neq G_4(p, \tau)$.

Hierauf sei $g^\tau(p) = g_2^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, in denen weder $g_3^\tau(p)$ noch $g_4^\tau(p)$ erklärt ist. Es sei $g^\tau(p) = g_3^\tau(p)$ in den (p, τ) , in denen $g_3^\tau(p)$ erklärt ist; und $g^\tau(p) = g_4^\tau(p)$ in den (p, τ) , in denen der Punkt $g_4^\tau(p)$ erklärt ist. Statt $g^\tau(p)$ schreiben wir auch $G(p, \tau)$, so daß also $G = (g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ ist.

Zum Beweis, daß $g^\tau(p) = f^\tau(p)$ für $(p, \tau) \in U$, genügt, da $g_2^\tau(p) = f^\tau(p)$ für $(p, \tau) \in U$, der Nachweis, daß $g^\tau(p) = g_2^\tau(p)$ für $(p, \tau) \in U$. Das ist aber richtig, da die Menge aller Punkte (p, τ) , in denen der Punkt $g_3^\tau(p)$ oder der Punkt $g_4^\tau(p)$ erklärt ist, in U liegt.

Da $\varrho(F, G_2) < \varepsilon$, braucht es zum Beweis, daß $\varrho(F, G) < \varepsilon$, nur den Nachweis, daß $\varrho(f^\tau(p), g_3^\tau(p)) < \varepsilon$ in allen (p, τ) , in denen $g_3^\tau(p)$ erklärt, und $\varrho(f^\tau(p), g_4^\tau(p)) < \varepsilon$ in allen (p, τ) , in denen $g_4^\tau(p)$ erklärt. Das ist richtig, da V_0 und ebenso V_m einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat und (20) gilt.

Schließlich folgt $p \neq g^\tau(p)$, $(p, \tau) \in \bar{U}$, aus (16) und der Erklärung von G, G_3, G_4 . Damit ist Satz 3 bewiesen.

Aus Satz 2 und Satz 3 folgt:

Satz 4. *Es seien P von der Dimension 2; F eine endliche Abbildungsschar in P ; und $A_1, \dots, A_m$ die Singularitäten von F ; der Grad von A_1 bei F gleich Null; U eine Umgebung von $\bar{A}_1$ und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine endliche Abbildungsschar G in P mit den Eigenschaften: für $(p, \tau) \in U$ ist $F(p, \tau) = G(p, \tau)$; die Entfernung $\varrho(F, G)$ ist $< \varepsilon$; falls $m = 1$, besitzt G keine Singularität; wenn $m > 1$, sind die Mengen $A_2, \dots, A_m$ die Singularitäten von G und ihre Grade beziehungsweise die gleichen wie bei F .*

Die in der Einleitung gegebene Definition der Unwesentlichkeit einer Singularität mit Satz 4 zusammenfassend, erhält man: Sind P von der Dimension 2, F eine endliche Abbildungsschar in P und A eine Singularität von F mit dem Grad Null, so ist A unwesentlich.

Hier schließen unsere Überlegungen. Es folgen Bemerkungen, die unbewiesen bleiben. — Nur eine andere Ausdrucksweise bedeutet es, wenn man statt der vorstehend untersuchten Abbildungsscharen in P Abbildungspaare f_0, g_0 folgender Art betrachtet: Es seien Q_0 die Menge aller Punkte (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, also der zu $[0, 1]$ gehörige Zylinder über P , f_0 eine stetige Abbildung von Q_0 in P und g_0 die durch

$g_0(p, \tau) = p, (p, \tau) \in Q_0$, bestimmte Abbildung von Q_0 in P . In Verallgemeinerung dieses Falles seien Q eine in einem Euklidischen Raum gelegene berandete oder unberandete endliche Euklidische Mannigfaltigkeit mit $\dim Q = (\dim P) + 1$, ferner f, g stetige Abbildungen von Q in P und ε eine positive Zahl. Dann gibt es stetige Abbildungen f', g' von Q in P mit den Eigenschaften: $\varrho(f, f') < \varepsilon$ und $\varrho(g, g') < \varepsilon$; bezeichnet A die Menge aller Punkte p aus Q mit $f'(p) = g'(p)$, so ist A entweder leer oder ein endliches homogenes 1-dimensionales Polyeder. — Sind a ein Punkt aus A , S ein Simplex in Q mit $a \in S$, $\dim S = \dim P$ und $A \cdot \bar{S} = a$, ferner T ein Simplex in P mit $f'(a) = g'(a) \in T$ und $\dim T = \dim P$, weiter S^* und T^* Orientierungen von S und T , so kann man dem Punkt a wie folgt einen „bezüglich (f', g', S^*, T^*) gebildeten Index“ zuordnen: Es seien t eine topologische Abbildung von $\bar{S}$ auf $\bar{T}$ mit $t(S^*) = T^*$; ferner S_0 ein Simplex in Q , so daß $a \in S_0 \subset S$, $\dim S_0 = \dim S$ und für jeden Punkt p aus $\bar{S}_0$ der Punkt

$$t(p) + (f'(p) - g'(p))$$

in T liegt. Bezeichnen wir für jeden Punkt q aus $t(\bar{S}_0)$ mit $h(q)$ den Punkt

$$q + (f' t^{-1}(q) - g' t^{-1}(q)),$$

so stellt h eine stetige Abbildung von $t(\bar{S}_0)$ in T dar. Der Punkt $t(a)$ ist der einzige Fixpunkt dieser Abbildung. Sein Index bei h ist der bezüglich (f', g', S^*, T^*) gebildete Index von a . — Hierauf kann man die Menge A in eindimensionale Teilmengen $A_1, \dots, A_m$ zerlegen, die den oben erklärten Singularitäten einer Abbildungsschar entsprechen und denen wie diesen eine ganze Zahl als ihr Grad zukommt.

Circuits in Critical Graphs.

By

G. A. Dirac, Vienna.

(Received January 24, 1955.)

1.

The graphs considered in this paper are such that no node is joined to itself by an edge and two distinct nodes are joined by at most one edge. $a.b$ denotes that the nodes a and b are joined by an edge. If Γ is a graph and S is a subset of its nodes, $\Gamma - S$ denotes the graph obtained by deleting from Γ all the nodes in S and all the edges incident with a node in S . If I is a subset of the set of edges of Γ , $\Gamma - I$ denotes the graph obtained by deleting from Γ all the edges in I , but no nodes. $\Gamma_1 + \Gamma_2$ is the union of Γ_1 and Γ_2 .

An *isthmus* is a node such that, when it is deleted from the graph, the number of connected components is increased. A *complete n -graph* is a graph consisting of n nodes, every distinct pair being joined by an edge. A graph is *Hamiltonian* if it contains a circuit passing through all the nodes.

A graph is *k -colourable* if all its nodes can be divided into k mutually disjoint colour classes in such a way that no two nodes in the same class are joined by an edge. Such a division of the nodes into classes is called a *colouring*, into k classes a *k -colouring*. A graph is said to be *k -chromatic* or to have *chromatic number k* if it is k -colourable but not $(k - 1)$ -colourable.

A graph is said to be *node critical* if deleting any node decreases the chromatic number. It is said to be *critical* if deleting any node or any edge decreases the chromatic number. Critical graphs have the following properties:

A critical graph is finite, connected, and contains no isthmus. (1)

The degree of every node of a critical graph is at least $k - 1$. (2)

Every k -chromatic graph contains a critical k -chromatic subgraph. (3)

(G. A. Dirac, Proc. London Math. Soc. (3) 2, 69—81 (1952). This paper will be referred to as I.)

A critical k -chromatic graph may be looked on as a k -chromatic graph with all superfluous nodes and edges deleted. This paper is concerned with the lengths of the circuits contained in critical graphs.

We first prove

Theorem 1: A connected k -chromatic graph without an isthmus in which every node with at most one exception has degree $\leq k-1$ is critical.

Proof: The theorem is obviously true for $k \leq 2$. Suppose $k \geq 3$. It will first be shewn that every proper subgraph of such a graph contains a node of degree $\leq k-2$. Let Γ be such a graph and let Γ' be any connected proper subgraph of Γ . If Γ' contains all the nodes of Γ then it obviously contains a node of degree $\leq k-2$. If Γ' does not contain all the nodes of Γ , at least two nodes of Γ' are joined to nodes of Γ not in Γ' , otherwise either Γ' would consist of a single node, or Γ would be disconnected or contain an isthmus. Every node in Γ with at most one exception has degree $\leq k-1$ in Γ , so Γ' contains at least one node of degree $\leq k-2$ in Γ' .

The truth of the theorem now follows from (2) and (3).

Corollary: A graph satisfying the conditions of Theorem 1 is finite, the degree of every node with at most one exception is $k-1$, and the exceptional node has degree $\geq k-1$.

This follows from (1), (2) and Theorem 1.

2.

Theorem 2: For all $k \geq 4$ and for all $n \geq k$, $n \neq k+1$, there are critical k -chromatic Hamiltonian graphs of order n .

The theorem will first be proved for $k=4$.

Let C_m be a circuit containing $2m+1$ nodes and edges, $m \geq 1$. The graph Γ_m consisting of C_m together with a node not in C_m joined to all the nodes of C_m is clearly 4-chromatic, critical and Hamiltonian.

Let C_n be a circuit containing the $2n+1$ nodes $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$, $n \geq 2$. Let Γ_{ni} be the graph which contains C_n and two distinct nodes b and c not contained in C_n , b joined to $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i$ and c to $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{2n+1}$ where $i = 2p+1$, $1 \leq p < n$.

Γ_{ni} cannot be coloured with three colours. For in any 3-colouring in which b, c and a_i have different colours $a_2, a_4, \dots, a_{i-1}$ would have to have the same colour as c ; $a_{i+1}, a_{i+3}, \dots, a_{2n}$ would have to have the

same colour as b , and the remaining nodes, which include a_1 and a_{2n+1} , would have to have the same colour as a_i . This is not possible because $a_1 \cdot a_{2n+1}$. If b and c have the same colour, three additional colours are needed to colour the nodes of C_n . From this it follows that Γ_{ni} is 4-chromatic.

Γ_{ni} is critical because $\Gamma_{ni} - (a_i, b)$ and $\Gamma_{ni} - (a_i, c)$ are 3-chromatic, and any other proper subgraph of Γ_{ni} contains a node of degree ≤ 2 . $\Gamma_{ni} - (a_i, b)$ can be coloured with the colours 1, 2 and 3 as follows: $b, a_i, a_{i+2}, \dots, a_{2n+1}$, are coloured 1, $a_1, a_3, \dots, a_{i-2}, a_{i+1}, a_{i+3}, \dots, a_{2n}$ are coloured 2, $a_2, a_4, \dots, a_{i-1}, c$ are coloured 3.

The graph contains the circuit whose nodes in order are $a_1, b, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{2n}, c, a_{2n+1}$.

The graphs Γ_m are of order $2m + 2$, $m = 1, 2, 3, \dots$. The graphs Γ_n are of order $2n + 3$, $n = 2, 3, 4, \dots$. This proves the theorem for $k = 4$.

The truth of Theorem 2 now follows from the fact that if for all $n \geq k$, $n \neq k + 1$, there are critical k -chromatic Hamiltonian graphs of order n then for all $n' \geq k + 1$, $n' \neq k + 2$, there are critical $(k + 1)$ -chromatic Hamiltonian graphs of order n' .

If Γ is a critical k -chromatic Hamiltonian graph of order n , the graph Γ' obtained from Γ by joining a new node not in Γ to all the nodes of Γ is critical, $(k + 1)$ -chromatic and Hamiltonian. It is easy to see that Γ' is $(k + 1)$ -chromatic and Hamiltonian. If an edge belonging to Γ is removed from Γ' the remainder of Γ can be coloured with $k - 1$ colours because Γ is critical, and the node not in Γ can be given a k -th colour. If an edge which is not in Γ is removed from Γ' , the two end nodes of this edge can be given the same colour, and the remainder of the graph can be coloured with $k - 1$ additional colours. Thus Γ' is critical. This proves Theorem 2.

Theorem 2 cannot be extended to the case $k = 3$ because the critical 3-chromatic graphs are the circuits with an odd number of nodes and edges. There are no critical k -chromatic graphs of order $k + 1$. (I, Theorem 7).

3.

Let $L_k(n)$ be the largest positive integer with the property that every k -chromatic critical graph of order n contains a circuit of length $\geq L_k(n)$. For all $k \geq 4$ $L_k(n)$ is defined for all $n \geq k$, $n \neq k + 1$, by Theorem 2 and I, Theorem 7. John B. Kelly and L. M. Kelly have proved

that $L_k(n) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ and that $\liminf L_4(n)/\log^2 n \leq 3/\log^2 6.75$. They conjectured that $\liminf L_k(n)/\log^2 n < \infty$ for all $k > 4$ (Amer. J. Math. **76**, 786—792 (1954). I had previously thought that $\liminf L_k(n)/n^{1/4} > 0$ (I).)

I will prove the following

Theorem 3: For $k \geq 3$

$$\liminf \frac{L_{k+1}(n)}{\log^2 n} \leq \frac{k}{\log^2 [k(\frac{k}{k-1})^{k-1}]}.$$

Let a sequence of graphs $H_1, H_2, H_3, \dots$ be defined as follows for each $k \geq 3$:

Let H_1 be the complete k -graph whose nodes are $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}$. (Here, and in what follows, distinct suffixes affixed to a denote distinct nodes.) Let K_1 be the complete k -graph whose nodes are $a_{11}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2k}$. Let $H_2 = H_1 + K_1 - (a_{11}, a_{12}) - (a_{11}, a_{2k}) + (a_{12}, a_{2k})$. Let K_2 be the complete k -graph whose nodes are $a_{11}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3k}$. Let $H_3 = H_2 + K_2 - (a_{11}, a_{22}) - (a_{11}, a_{3k}) + (a_{22}, a_{3k}) \dots$. Let $H_i = H_{i-1} + K_{i-1} - (a_{11}, a_{i-1,2}) - (a_{11}, a_{ik}) + (a_{i-1,2}, a_{ik})$, where H_{i-1} contains the nodes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2k}, \dots, a_{i-1,2}, a_{i-1,3}, \dots, a_{i-1,k}$ and K_{i-1} is the complete k -graph whose nodes are $a_{11}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}$. Let h_i be the number of nodes in H_i , $i = 1, 2, 3, \dots$

It is easy to see that each of the sequence of graphs $H_1, H_2, H_3, \dots$ is k -chromatic and has no isthmus and every node other than a_{11} has degree $k-1$. Hence, by Theorem 1, $H_1, H_2, H_3, \dots$ are all critical. $h_i = h_{i-1} + k - 1$, so $h_i \rightarrow \infty$ as $i \rightarrow \infty$.

Lemma 1: Suppose every node a_{xy} belonging to H_i , $i \geq 1$, is joined to exactly one node b_{xy} which is not in H_i . The nodes b_{xy} are not necessarily all distinct, they form a set which will be denoted by B_i . Let each of the nodes in B_i have one of the colours $1, 2, \dots, k$. Then, in whatever way these colours are assigned to the nodes of B_i , unless all the nodes in B_i have the same colour the nodes of H_i can be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ in such a way that a_{xy} and b_{xy} have different colours for all $a_{xy} \in H_i$ and all $b_{xy} \in B_i$ and no two nodes of H_i which are joined by an edge have the same colour. If all the nodes in B_i have the same colour then the colours $1, 2, \dots, k$ are not sufficient but the colours $1, 2, \dots, k, k+1$ are sufficient to colour the nodes of H_i in accordance with these conditions.

This will be proved by shewing that it is true for H_1 and that it is true for H_i if it is true for H_{i-1} .

To prove the lemma for H_1 suppose $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}$ do not all have the same colour. It may be assumed without loss of generality that b_{11} has the colour k and b_{1k} has the colour 1. Using always the colours $1, 2, \dots, k$, let a_{11} be given the colour 1 and let a_{1j} be given a colour different from the colours of $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1j-1}$ and b_{1j} successively for $j = 2, 3, \dots, k-1$. This can be carried out because a_{1j} is joined to only j previously coloured nodes and $j \leq k-1$. a_{1k} is joined to $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k-1}$ and b_{1k} , k nodes, of which a_{11} and b_{1k} have the same colour. So a_{1k} can now be given one of the colours $1, 2, \dots, k$ different from the colours of $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k-1}$, and b_{1k} , and a colouring of the nodes of H_1 in accordance with the conditions of the lemma is thereby obtained.

If the nodes $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}$ all have the same colour, the nodes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}$ require k additional colours, one of which may be $k+1$. This proves the lemma for H_1 . Further, in this case ($b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}$ all have the same colour) a_{11} may be given any arbitrarily chosen colour from among $1, 2, \dots, k, k+1$ different from the colour of b_{11} and the remaining nodes of H_1 can then be coloured as required with these colours.

Now let $H_1' = H_1 - (a_{11}, a_{1k})$.

In whatever way the colours $1, 2, \dots, k$ are assigned to the nodes $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}, a_{11}$ can be given any one of these colours which is different from the colour of b_{11} and the nodes $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1k}$ can then be coloured with these colours in such a way that no two nodes of H_1' which are joined by an edge have the same colour and a_{1x} and b_{1x} have different colours for $2 \leq x \leq k$. (1)

Proof: Using always the colours $1, 2, \dots, k$ let a_{1j} be given a colour different from the colours of $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1j-1}, b_{1j}$ successively for $j = 1, 2, \dots, k-1$. This can be carried out because a_{1j} is joined to j previously coloured nodes and $j \leq k-1$. Then let a_{1k} be given a colour which is different from the colours of the $k-1$ nodes $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1k-1}, b_{1k}$ to which it is joined. This gives a colouring of the nodes of H_1' as required, a_{11} having any arbitrarily chosen colour different from the colour of b_{11} .

If $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}$ all have the same colour then in any colouring of the nodes of H_1' in accordance with the conditions described in (1) a_{11} and a_{1k} have the same colour. (2)

Proof: If a_{11} and a_{1k} had different colours in such a colouring then the nodes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}$ would each have a different colour, and each of these colours would be different from the colour of $b_{11}, \dots, b_{1k}$. k colours are not sufficient for this.

If a_{11} has the same colour as b_{1k} then a_{1k} and a_{11} necessarily have different colours. (3)

Proof: a_{1k} cannot have the same colour as b_{1k} . *Note:* a_{11} can have the same colour as b_{1k} only if b_{11} and b_{1k} do not have the same colour.

If a_{11} is assigned any colour different from the colour of b_{1k} (and of b_{11}) then the remaining nodes of H'_1 can be coloured as required in (1) in such a way that a_{1k} has the same colour as a_{11} . (4)

Proof: By (1) the nodes of H'_1 can be coloured in the way described there. a_{1k} is joined to $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1k-1}$ and to b_{1k} . None of these nodes has the same colour as a_{11} because $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1k-1}$ are each joined to a_{11} and a_{11} is assigned a colour which is different from the colour of b_{1k} . Hence a_{1k} can be given the same colour as a_{11} .

If $b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1k}$ do not all have the same colour and if a_{11} is assigned any colour which is different from the colour of b_{1k} (and of b_{11}) then the remaining nodes of H'_1 can be coloured as required in (1) in such a way that a_{11} and a_{1k} have different colours. (5)

Proof: Let l be such that $2 \leq l \leq k-1$ and b_{1l} does not have the same colour as b_{1k} , but if $2 \leq l' < l$ then $b_{1l'}$ has the same colour as b_{1k} . Let $a_{1l'}$ be given a colour different from the colours of $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l'-1}$, $b_{1l'}$ successively for $l' = 2, 3, \dots, l-1$. Then the nodes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l-1}$ each have a colour which is different from the colour of b_{1k} . Let a_{1l} be given the colour of b_{1k} and then let a_{1j} be given a colour which is different from the colours of $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1j-1}, b_{1j}$ successively for $j = l+1, l+2, \dots, k-1$. This can be done because a_{1j} is joined to j previously coloured nodes and $j \leq k-1$. a_{1k} is joined to $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1k-1}, b_{1k}, k-1$ nodes, of which a_{1l} and b_{1k} have the same colour. Hence there is now a choice of two or more colours for a_{1k} . At least one of them is different from the colour of a_{11} .

Let $H'_{i-1} = H_{i-1} - (a_{11}, a_{i-1,2})$ and let B_{i-1} be the set of those members of B_i which are joined to nodes of H_{i-1} . In whatever way the colours $1, 2, \dots, k$ are assigned to the members of B_{i-1} a_{11} can be given any one of these colours which is different from the colour of b_{11} and the remaining nodes of H'_{i-1} can then be coloured with these colours subject to the conditions: no two nodes of H'_{i-1} which are joined by an edge have the same colour and no node of H'_{i-1} has the same colour as the node in B_{i-1} to which it is joined. (6)

Proof: Any subgraph of H'_{i-1} other than a_{11} alone, including H'_{i-1} itself, clearly contains a node other than a_{11} of degree $\leq k-2$. Let a_{11}

be given any one of the colours $1, 2, \dots, k$ different from the colour of b_{11} . Suppose the remaining nodes of H'_{i-1} cannot be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ in accordance with the above conditions. Let H^*_{i-1} be a subgraph of H'_{i-1} which includes a_{11} and which is such that it cannot be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ in accordance with the above conditions with H'_{i-1} replaced by H^*_{i-1} , but if any node other than a_{11} is deleted from it, the remaining graph can be coloured in accordance with the above conditions as they apply to it. H'_{i-1} has such a subgraph, which may be H'_{i-1} itself, because it is finite, and, if every node except a_{11} is deleted from it, the remaining node a_{11} can be given any colour different from the colour of b_{11} . H^*_{i-1} contains at least one node other than a_{11} of degree $\leq k-2$. Let $a_{\alpha\beta}$ be such a node. $H^*_{i-1} - a_{\alpha\beta}$ can be coloured in accordance with the above conditions with H'_{i-1} replaced by $H^*_{i-1} - a_{\alpha\beta}$. $a_{\alpha\beta}$ is joined to at most $k-2$ nodes in H^*_{i-1} and to $b_{\alpha\beta}$, at most $k-1$ nodes in all, so that, after $H^*_{i-1} - a_{\alpha\beta}$ has been coloured, $a_{\alpha\beta}$ can be given one of the colours $1, 2, \dots, k$ different from the colours of all the nodes in H^*_{i-1} to which it is joined, and different from the colour of $b_{\alpha\beta}$. H^*_{i-1} can therefore be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ in accordance with the above conditions with H'_{i-1} replaced by H^*_{i-1} , which contradicts the definition of H^*_{i-1} . This proves (6).

If all the nodes in B_{i-1} have the same colour, then $a_{i-1,2}$ has the same colour as a_{11} in every colouring which satisfies the conditions stated in (6). (7)

Proof: If there were a colouring in which a_{11} and $a_{i-1,2}$ have different colours and all the nodes in B_{i-1} have the same colour, a_{11} and $a_{i-1,2}$ could be joined by an edge, and H_{i-1} would then be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$, which is impossible since H_{i-1} is k -chromatic and all its nodes have to have colours which are different from the colour of the nodes in B_{i-1} .

The lemma can now be proved for H_i , $i > 1$. It will be shown that if the nodes in B_i do not all have the same colour, the nodes of H_i can be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ in accordance with the conditions stated in the lemma. There are two cases to consider: 1., the nodes in B_{i-1} all have the same colour and the nodes $b_{11}, b_{i2}, b_{i3}, \dots, b_{ik}$ do not all have the same colour. 2., the nodes in B_{i-1} do not all have the same colour. (1') — (5') denote the results corresponding to (1) — (5) respectively with a_{1x} replaced by a_{ix} and b_{1x} replaced by b_{ix} for $2 \leq x \leq k$. These results apply to $K'_{i-1} = K_{i-1} - (a_{11}, a_{ik})$ in place of H'_1 because H_1 and K_{i-1} are isomorphic. Note that $b_{11} \in B_{i-1}$.

1., There are two alternatives: (i) b_{11} and b_{ik} have the same colour, (ii) they do not.

1(i)., In this case $b_{i2}, b_{i3}, \dots, b_{ik}$ do not all have the same colour, for, if they did, $b_{11}, b_{i2}, \dots, b_{ik}$ would all have the same colour. Hence, by (4') and (5'), $a_{11}, a_{i2}, \dots, a_{ik}$ can be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ as required in the lemma, and corresponding to any colour different from the colour of b_{11} assigned to a_{11} there is such a colouring in which a_{ik} has the same colour as a_{11} and also one in which a_{ik} has a colour which is different from the colour assigned to a_{11} .

Let the nodes of H'_{i-1} be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ as described in (6). By (6) and (7) a_{11} and a_{i-12} have the same colour. Let $a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}$ now be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$, a_{11} and a_{ik} having different colours. Then a_{i-12} and a_{ik} have different colours, and so a colouring of the nodes of H_i as required in the lemma is obtained.

1(ii)., In this case let the nodes of H'_{i-1} be coloured as described in (6) with the colour of b_{ik} assigned to a_{11} . By (7) a_{11} and a_{i-12} have the same colour. By (1') $a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}$ can now be coloured and by (3') a_{ik} has a colour which is different from the colour of a_{11} and therefore different from the colour of a_{i-12} . So a colouring of the nodes of H_i as required in the lemma is obtained.

2., By the induction hypothesis the lemma is true for H_{i-1} , so that the nodes of H'_{i-1} can be coloured as described in (6) a_{11} and a_{i-12} having different colours. There are now two alternatives: (i) there is such a colouring in which a_{11} and a_{i-12} have different colours and in which a_{11} does not have the same colour as b_{ik} . (ii) in any colouring of the nodes of H'_{i-1} as described in (6) in which a_{11} does not have the same colour as b_{ik} a_{11} and a_{i-12} have the same colour.

2(i)., In this case the nodes of H_{i-1} having been coloured in accordance with (i), $a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}$ may be coloured as required in (1'), a_{ik} having the same colour as a_{11} , by (2') and (4'). Then a_{i-12} and a_{ik} have different colours, so that a colouring of the nodes of H_i as required in the lemma is obtained.

2(ii)., The assumption that (ii) is the case implies that a_{11} can have the same colour as b_{ik} because of the induction hypothesis. Hence in this case b_{11} and b_{ik} have different colours. There are again two alternatives to be considered: 2(ii a): $b_{i2}, b_{i3}, \dots, b_{ik}$ do not all have the same colour, 2(ii b): they do.

2(ii a)., Let a_{11} be given a colour which is different from the colours of b_{11} and of b_{ik} and let the remaining nodes of H'_{i-1} be coloured as described in (6). By (5') $a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}$ can now be coloured as required in (1'), a_{ik} having a colour which is different from the colour of a_{11} . a_{i-12} has the same colour as a_{11} . Then we have a colouring of the nodes of H_i as required by the lemma because a_{i-12} and a_{ik} have different colours.

2(ii b)., Let the nodes of H'_{i-1} be coloured as described in (6) a_{11} having the same colour as b_{ik} . Then $a_{11}, b_{i2}, \dots, b_{ik}$ all have the same colour, c say. The nodes $a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}$ form a complete $(k-1)$ -graph which can be coloured in any way subject to the conditions that all its nodes have different colours and that none of its nodes have the colour c . There are $k-1 (> 1)$ choices for the colour of a_{ik} . At least one possible choice is certainly different from the colour given to a_{i-12} in the colouring of the nodes of H'_{i-1} , and with any such choice a colouring of the nodes of H_i as required in the lemma is obtained.

It has therefore been proved that if the nodes in B_i do not all have the same colour, the nodes of H_i can be coloured as required in the lemma with the colours $1, 2, \dots, k$. If the nodes in B_i all have the same colour then, since H_i is k -chromatic, the colours $1, 2, \dots, k$ are not sufficient but the colours $1, 2, \dots, k, k+1$ are sufficient to colour the nodes of H_i as required. Hence the lemma is true for H_i and therefore it is true generally for all $k \geq 3$.

To prove Theorem 3, for each $i=1, 2, 3, \dots$, a graph Γ_i is to be constructed as follows:

$\mathcal{B}_i$ is a set of $k(h_i-1)+1$ distinct nodes, where h_i is the number of nodes in H_i and k is the chromatic number of H_i . Corresponding to every subset $\mathcal{H}_{ir}$ of h_i distinct members of $\mathcal{B}_i$ construct a graph H_{ir} isomorphic to H_i , $r=1, 2, 3, \dots, \binom{k(h_i-1)+1}{h_i}$. $\mathcal{B}_i$ is to have no node in common with any H_{ir} and if $r \neq r'$ H_{ir} and $H_{ir'}$ are to have no node in common. Join every node of H_{ir} by an edge to exactly one node in $\mathcal{H}_{ir}$, in such a way that no two distinct nodes in H_{ir} are joined to the same node in $\mathcal{H}_{ir}$. Γ_i contains $k(h_i-1)+1+\binom{k(h_i-1)+1}{h_i} h_i$ nodes.

Γ_i is $(k+1)$ -chromatic and node critical.

To shew that Γ_i is $(k+1)$ -chromatic suppose that it is coloured with the colours $1, 2, \dots, k$. In this k -colouring of Γ_i at least h_i nodes in $\mathcal{B}_i$ have the same colour because $\mathcal{B}_i$ contains more than $k(h_i-1)$ nodes. Let $\mathcal{H}_{ij}$ be a subset of h_i nodes of $\mathcal{B}_i$ which all have the same colour. By Lemma 1 one of the nodes of H_{ij} must have a colour which is different

from $1, 2, \dots, k$. This is a contradiction, so Γ_i is not k -colourable. But Γ_i is $(k+1)$ -colourable because the nodes of all the H_{ir} can be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ and the nodes in $\mathcal{B}_i$ can all be given the colour $k+1$. So Γ_i is $(k+1)$ -chromatic.

If a node belonging to $\mathcal{B}_i$ is deleted from Γ_i $k(h_i-1)$ nodes remain. Colour these with the colours $1, 2, \dots, k$ giving each colour to exactly h_i-1 nodes. None of the graphs H_{ir} has all its nodes joined to a set of nodes in $\mathcal{B}_i$ with all its members coloured alike. Therefore, by Lemma 1, the nodes of all the H_{ir} can be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ and a k -colouring of the whole graph obtained.

If a node belonging to H_{ir} is deleted from Γ_i , colour all the nodes belonging to $\mathcal{H}_{ir}$ with the colour k . What remains of H_{ir} can be coloured with the colours $1, 2, \dots, k-1$ because H_{ir} is critical. Colour the $(k-1)(h_i-1)$ nodes of $\mathcal{B}_i$ which do not belong to $\mathcal{H}_{ir}$ with the colours $1, 2, \dots, k-1$ giving each colour to exactly h_i-1 nodes. Then if $r \neq r'$ the nodes of $\mathcal{H}_{ir'}$ do not all have the same colour. Therefore, by Lemma 1, the nodes of all the $H_{ir'}$ can be coloured with the colours $1, 2, \dots, k$ and a k -colouring of the remaining graph obtained. So Γ_i is node critical.

Since Γ_i is node critical, it contains a critical $(k+1)$ -chromatic subgraph with the same number of nodes as Γ_i . Γ_i contains no circuit with more than $h_i[k(h_i-1)+1]+k(h_i-1)+1 = [k(h_i-1)+1][h_i+1]$ nodes. $h_i \rightarrow \infty$ as $i \rightarrow \infty$, and such a sequence of graphs can be constructed for all $k \geq 3$. Theorem 3 now follows from *Stirling's* formula. For $k=3$ it coincides with the result obtained by *John B. and L. M. Kelly* (loc. cit.).

The Coefficients of Certain Power Series.

By

L. Carlitz, Durham, N. C., USA.

(Received January 28, 1955.)

1. Introduction. Put

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)+(1-x)(1-z)+(1-y)(1-z)} = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} A_{klm} x^k y^l z^m.$$

Friedrichs and *Lewy* conjectured that the coefficients A_{klm} are positive and *Szegö* [4] proved the truth of this conjecture. Indeed he proved that if

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2) \dots (t - x_n)$$

and

$$\frac{1}{f'(1)} = \sum_0^{\infty} A_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad (1.1)$$

then $A_{k_1 \dots k_n} > 0$ for all $n \geq 1$. *Kaluza* [3] put

$$\frac{3}{(1-3x)(1-3y)+(1-3x)(1-3z)+(1-3y)(1-3z)} = \sum_0^{\infty} a_{klm} x^k y^l z^m$$

so that $a_{klm} = 3^{k+l+m+1} A_{klm}$; he defined $c_{rs}^{(m)}$ by means of

$$(1+x)^r (1-x)^s = \sum_{m=0}^{r+s} c_{rs}^{(m)} x^m$$

and showed that

$$a_{klm} = \frac{2^m}{2^{k+l}} \frac{(k+l+m)!}{k! l! m!} \sum_{r=0}^{k+l} \frac{3}{\binom{k+l+m}{r}} (c_{k,l}^{(r)})^2, \quad (1.2)$$

from which it is obvious that $a_{klm} > 0$. Note that the $c_{r,s}^{(m)}$ are essentially Cauchy's numbers [5, p. 324].

Now using (3.2) below it is easy to show that if p is a prime $> \max(2, k, l)$, then (1.2) implies

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-1} \binom{\lambda}{i} a_{k, l, m+ip} t_{(p-1)} \pmod{p^{\lambda}}, \quad (1.3)$$

provided $m \geq k + l$.

We shall show that a like result holds in the general case corresponding to (1.1). The proof depends upon an explicit formula for the coefficients somewhat different from (1.2).

2. For brevity we put

$$P = \prod_0^n (1 - x_i), \quad S = \sum_0^n \frac{x_i}{1 - x_i}, \quad (2.1)$$

and

$$\Phi = \Phi(x_0, x_1, \dots, x_n) = P(n+1+S). \quad (2.2)$$

We also put

$$x_i = (n+1) z_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

and set

$$\left(\frac{n+1}{\Phi} \right)^{r+1} = \sum_{(k)} a_{k_0 k_1 \dots k_n} z_0^{k_0} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad (2.4)$$

where the summation is over all $k_0, k_1, \dots, k_n$ from 0 to ∞ . For simplicity we suppose the parameter r a non-negative integer. Then it is clear that the coefficients $a_{k_0 k_1 \dots k_n}$ are integers (the fact that they are positive will not be required). We remark that if

$$g(t) = (t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n),$$

then

$$g'(1) = g(1) \sum_0^n \frac{1}{1-x_i} = g(1) \sum_0^\infty \left(1 + \frac{x_i}{1-x_i} \right) = P(n+1+S) = \Phi.$$

By (2.2) we have

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{\Phi} \right)^{r+1} &= P^{-r-1} \left(1 + \frac{1}{n+1} S \right)^{-r-1} = \\ &= P^{-r-1} \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \binom{r+m}{m} \left(\frac{S}{n+1} \right)^m. \end{aligned}$$

Since by (2.3)

$$\frac{1}{n+1} S = \frac{1}{n+1} \sum_0^n \frac{x_i}{1-x_i} = \sum_0^n \frac{z_i}{1-(n+1)z_i},$$

it is seen that

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+1}{\Phi}\right)^{r+1} &= \sum_{(i)} (-1)^{i_0+i_1+\dots+i_n} \binom{r+i_0+i_1+\dots+i_n}{r} \frac{(i_0+i_1+\dots+i_n)!}{i_0! i_1! \dots i_n!} \\
&\cdot \prod_{s=0}^n \frac{z_s^{i_s}}{(1-(n+1)z_s)^{i_s+r+1}} = \\
&= \sum_{(i)} (-1)^{i_0+\dots+i_n} \frac{(r+i_0+\dots+i_n)}{r! i_0! \dots i_n!} \prod_{s=0}^n \sum_{(j)} \binom{r+i_s+j_s}{j_s} (n+1)^{j_s} z_s^{i_s+j_s} \\
&= \sum_{(k)} z_0^{k_0} \dots z_n^{k_n} \sum_{i_s+j_s=k_s} (-1)^{i_0+\dots+i_n} \frac{(r+i_0+\dots+i_n)!}{r! i_0! \dots i_n!} \prod_{s=0}^n \binom{r+k_s}{j_s} (n+1)^{j_s}.
\end{aligned}$$

Comparison with (2.4) now gives

$$a_{k_0 \dots k_n} = \sum_{i_s+j_s=k_s} (-1)^{i_0+\dots+i_n} \frac{(r+i_0+\dots+i_n)!}{r! i_0! \dots i_n!} \prod_{s=0}^n \binom{r+k_s}{j_s} (n+1)^{j_s}, \quad (2.5)$$

where the summation is over all non-negative i_s, j_s such that $i_s + j_s = k_s$ for $s = 0, 1, \dots, n$.

We now define

$$C_k = C_{ki_1 \dots i_n} = \sum_{i+j=k} (-1)^i (n+1)^j \frac{(r+i+i_1+\dots+i_n)!}{i!} \binom{r+k}{j} \quad (2.6)$$

so that by (2.5)

$$a_{kk_1 \dots k_n} = \frac{1}{r!} \sum'_{i_s+j_s=k_s} (-1)^{i_1+\dots+i_n} \frac{C_{ki_1 \dots i_n}}{i_1! \dots i_n!} \prod_{s=1}^n \binom{r+k_s}{j_s} (n+1)^{j_s}, \quad (2.7)$$

where now the summation is over $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$ only.

It follows from (2.6) that (for fixed $i_1, \dots, i_n$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k z^k}{(r+k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(r+k)!} \sum_{i+j=k} (-1)^i (n+1)^j \frac{(r+i+N)!}{i!} \binom{r+k}{j} = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(r+i+N)!}{(r+i)!} \frac{z^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+1)^j z^j}{j!} \\
&= e^{(n+1)z} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (r+i+1)_N \frac{z^i}{i!}, \quad (2.8)
\end{aligned}$$

where $N = i_1 + \dots + i_n$ and $(m)_i = m(m+1)\dots(m+i-1)$, $(m)_0 = 1$. But it is evident that

$$(r+i+1)_N = b_N^{(N)}(i)_N + b_{N-1}^{(N)}(i)_{N-1} + \dots + b_0^{(N)}, \quad (2.9)$$

where the $b_s^{(N)}$ are integers independent of i . Thus (2.8) becomes

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k z^k}{(r+k)!} &= e^{(n+1)z} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{z^i}{i!} \sum_{s=0}^N b_s^{(N)} i_s = \\ &= e^{(n+1)z} \sum_{s=0}^N (-1)^s b_s^{(N)} z^s \sum_{i=s}^{\infty} (-1)^{i-s} \frac{z^{i-s}}{(i-s)!} = e^{(n+1)z} e^{-z} \sum_{s=0}^N (-1)^s b_s^{(N)} z^s. \end{aligned}$$

We may therefore write

$$\sum_0^{\infty} \frac{C_k z^k}{(r+k)!} = e^{nz} \sum_0^N (-1)^s b_s^{(N)} z^s. \quad (2.10)$$

It is now evident from (2.10) that

$$C_k = \frac{(r+k)!}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s b_s^{(N)} n^{k-s} (k)_s. \quad (2.11)$$

Substituting from (2.11) in (2.7) we have therefore

$$\begin{aligned} a_{kk_1 \dots k_n} &= \frac{1}{r!} \sum'_{i_s + j_s = k_s} \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_n}}{i_1! \dots i_n!} \prod_{s=1}^n \binom{r+k_s}{j_s} (n+1)^{j_s} \cdot \\ &\cdot \frac{(r+k)!}{k!} \sum_{s=0}^{i_1 + \dots + i_n} (-1)^s b_s^{(i_1 + \dots + i_n)} n^{k-s} (k)_s. \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. Now consider for fixed integral n, s ,

$$f(k) = n^k k^s \quad (s \geq 0) \quad (3.1)$$

as a function of k . It is not difficult to show that if p is a prime and $\lambda, t \geq 1$, then

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} \binom{\lambda}{i} f(k + ip^t(p-1)) \equiv 0 \pmod{p^{\lambda t}} \quad (3.2)$$

for $p > n$ and all k and for $p \leq n$ provided $k \geq \lambda t$. For a proof of (3.2) see [2, § 3]. Indeed examination of the proof shows that the following slightly stronger result holds. Suppose $p \nmid n$ and that n belongs to the exponent $w \pmod{p}$; then we have

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} \binom{\lambda}{i} f(k + ip^t w) \equiv 0 \pmod{p^{\lambda t}} \quad (3.3)$$

for all k when $p > n$ and for $k \geq \lambda t$ when $p < n$.

For the application we note that (2.12) shows that for fixed $k_1, \dots, k_n$, the coefficient $a_{kk_1 \dots k_n}$ is a linear combination of terms of the type $n^{k-s} k^s$; moreover the coefficients will surely be integral $\pmod{p}$ provided

$$p > \max(r, k_1, \dots, k_n). \quad (3.4)$$

Consequently we get the following results.

Theorem 1. Let $r \geq 0$, $\lambda \geq 1$, $t \geq 1$ and let the prime p satisfy (3.4). Then for fixed $k_1, \dots, k_n$, the coefficient $a_k = a_{k k_1 \dots k_n}$ satisfies

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} \binom{\lambda}{i} a_{k+i p} \iota_{(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^{\lambda t}} \quad (3.5)$$

for $k \geq k_1 + \dots + k_n$ provided $p > n$, and for $k \geq k_1 + \dots + k_n + \lambda t$ otherwise.

Theorem 2. Assume that $p \nmid n$ and that n belongs to the exponent $w \pmod{p}$; also that p satisfies (3.4). Then we have

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} \binom{\lambda}{i} a_{k+i p} \iota_w \equiv 0 \pmod{p^{\lambda t}} \quad (3.6)$$

for $k \geq k_1 + \dots + k_n$ provided $p > n$ and for $k \geq k_1 + \dots + k_n + \lambda t$ otherwise.

In particular for $\lambda = 1$ (3.5), and (3.6) become

$$a_{k+p} \iota_{(p-1)} \equiv a_k \pmod{p^t} \quad (3.7)$$

and

$$a_{k+p} \iota_w \equiv a_k \pmod{p^t}, \quad (3.8)$$

respectively. In other words when $p \nmid n$ the period $\pmod{p^t}$ of a_k divides $p^t w$.

The above results are asymmetrical so far as the $n+1$ arguments of $a_{k k_1 \dots k_n}$ are concerned but it is of course evident that like results hold relative to each k_s . We shall not take the space to restate the results in a more symmetrical form.

4. The following remark may be of interest. Exactly as in the proof of (2.10), it follows from (2.5) that

$$\begin{aligned} \sum_{(k)} \frac{a_{k_0 \dots k_n}}{(r+k_0)! \dots (r+k_n)!} z_0^{k_0} \dots z_n^{k_n} &= \sum_{(j)} \frac{(n+1)^{j_0+\dots+j_n} z_0^{j_0} \dots z_n^{j_n}}{j_0! \dots j_n!} \\ &\cdot \sum_{(i)} (-1)^{i_0+\dots+i_n} \frac{(r+i_0+\dots+i_n)!}{r!(r+i_0)! \dots (r+i_n)!} \frac{z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n}}{i_0! \dots i_n!} = \\ &= e^{(n+1)(z_0+\dots+z_n)} \sum_{(i)} (-1)^{i_0+\dots+i_n} \frac{(r+1)_{i_0+\dots+i_n}}{(r+i_0)! \dots (r+i_n)!} \frac{z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n}}{i_0! \dots i_n!} \end{aligned}$$

where as above $(m)_i = m(m+1) \dots (m+i-1)$. Then recalling the definition of *P. Humbert's* confluent hypergeometric function [1, p. 134]

$$\Psi_2(\alpha; \beta_0, \dots, \beta_n; z_0, \dots, z_n) = \sum_{(k)} \frac{(\alpha)_{k_0+\dots+k_n}}{(\beta_0)_{k_0} \dots (\beta_n)_{k_n}} \frac{z_0^{k_0} \dots z_n^{k_n}}{k_0! \dots k_n!},$$

it therefore follows that

$$\sum_{(k)} \frac{a_{k_0} \dots k_n}{(r+k_0)! \dots (r+k_n)!} z_0^{k_0} \dots z_n^{k_n} = \frac{1}{(r!)^{n+1}} e^{(n+1)(z_0+\dots+z_n)} \cdot \Psi_2(r+1; r+1, \dots, r+1; -z_0, \dots, -z_n).$$

References.

- [1] *P. Appell and J. Kampé de Fériet*, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Paris, 1926.
- [2] *L. Carlitz and J. Riordan*, Congruences for sequence numbers. Not yet published.
- [3] *Th. Kaluza*, Elementarer Beweis einer Vermutung von *K. Friedrichs* and *H. Lewy*, Mathematische Zeitschrift, vol. 37 (1933), pp. 689—697.
- [4] *G. Szegő*, Über gewisse Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten, Mathematische Zeitschrift, vol. 37 (1933), pp. 674—688.
- [5] *G. N. Watson*, Theory of Bessel functions, second edition, Cambridge, 1944.

Gruppen von Restpolynomidealrestklassen nach Primzahlpotenzen.

Von

Wilfried Nöbauer, Wien.

(Eingelangt am 1. Februar 1955.)

In einer früheren Arbeit¹ wurde von mir die Gruppe $\mathfrak{G}_n$ betrachtet, die von den Restklassen nach dem Ideal der Restpolynome mod n , deren Polynome den Restklassenring mod n umkehrbar eindeutig in sich überführen, bezüglich der Operation des Einsetzens gebildet wird. Unter anderem wurde dort bewiesen, daß $\mathfrak{G}_{ab}$ mit $(a, b) = 1$ isomorph zum direkten Produkt $\mathfrak{G}_a \times \mathfrak{G}_b$ ist und $\mathfrak{G}_p$ (p Primzahl) gleich der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_p$. Im folgenden wird nun $\mathfrak{G}_{p^e}$ für $e > 1$ betrachtet und bewiesen, daß diese Gruppe isomorph zur Symmetrie² $\Sigma_p(\mathfrak{T}_{p^e-1})$ ist. $\mathfrak{T}_{p^e-1}$ ist dabei jene Untergruppe von $\mathfrak{G}_{p^e-1}$, die aus allen Elementen dieser Gruppe mit einem Repräsentantenpolynom $f(x)$ von folgender Gestalt besteht:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + pa_2 x^2 + \dots + p^{e-2} a_{e-1} x^{e-1}$$

Auf die Untersuchung dieser Gruppe ist damit also im wesentlichen das Studium von $\mathfrak{G}_n$ zurückgeführt, es werden aber hier nur einige ganz einfache Aussagen über sie gemacht.

§ 1. Wir setzen $e > 1$ voraus und betrachten zunächst die Gesamtheit $\bar{\mathfrak{G}}_{p^e}$ — nach [1] bildet sie eine Halbgruppe — der eindeutigen Abbildungen des Restklassenringes mod p^e auf sich, die sich in der Gestalt

$$i \rightarrow g(i) \bmod p^e \quad g(x) \quad \text{ganzzahliges Polynom}$$

ausdrücken lassen und beweisen folgenden

Satz I: Die Menge der eindeutigen Abbildungen des Restklassenringes mod p^e auf sich, die man erhält, wenn man in

¹ S. B. Akad. Wiss., Wien, Abt. IIa, **162**, 207—233 (1953). Wir zitieren diese Arbeit als [1].

² Vgl. Fußnote 5, S. 201.

$$k + px \rightarrow \sum_{v=0}^{e-1} c_{kv} p^v x^v \bmod p^e \quad k=0, 1, \dots, p-1; x=0, 1, \dots, p^{e-1}-1 \quad (1)$$

jede der ganzen Zahlen c_{kv} unabhängig von den anderen folgenden Wertebereich durchlaufen läßt:

$$0 \leq c_{kv} < p^{e-v-\varepsilon(v)} \quad (2)$$

(wobei $\varepsilon(i)$ der Exponent ist, zu dem p in der Primzahlzerlegung von $i!$ vorkommt und $p^r = 1$ für $r \leq 0$ gesetzt wird), enthält nur Abbildungen von $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$, und zwar jede Abbildung von $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$ genau einmal³.

Dem Beweis des Satzes schicken wir den Beweis folgenden Hilfssatzes voran: Die kleinste natürliche Zahl t_0 , für die es ein Restpolynom mod p^e der Gestalt

$$s_i(x) = t_0 p^i x^i + t_1 p^{i-1} x^{i-1} + \dots + t_i \quad (3)$$

gibt, hat den Wert:

$$t_0 = p^{e-i-\varepsilon(i)} \quad (4)$$

Die Richtigkeit dieses Hilfssatzes erkennt man folgendermaßen: Nach Hilfssatz 4 aus [1] gilt zunächst:

$$t_0 p^i \equiv 0 \bmod p^{e-\varepsilon(i)},$$

also

$$t_0 \geq p^{e-i-\varepsilon(i)}$$

Man bilde nun mit dem $r_i(x)$ von Hilfssatz 3 aus [1] das Polynom

$$\bar{s}_i(x) = p^{e-i-\varepsilon(i)} p^i r_i(x) = \begin{cases} p^i r_i(x) & \text{wenn } e-i \leq \varepsilon(i) \\ p^{e-\varepsilon(i)} r_i(x) & \text{wenn } e-i > \varepsilon(i) \end{cases}$$

Wie ersichtlich, besitzt $\bar{s}_i(x)$ jedenfalls die Gestalt (3) und aus der Bemerkung vor Hilfssatz 4 in [1] folgt, daß $\bar{s}_i(x)$ Restpolynom mod p^e ist. Daher ist $t_0 \leq p^{e-i-\varepsilon(i)}$.

Beim Beweis von Satz I gehen wir folgendermaßen vor: Zunächst zeigen wir, daß (1) jede Abbildung von $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$ mindestens einmal enthält, dann, daß (1) keine Abbildung mehr als einmal enthält und schließlich, daß jede Abbildung von (1) in $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$ enthalten ist.

a) Sei

$$i \rightarrow g(i) \bmod p^e \quad g(x) \text{ ganzzahliges Polynom} \quad (5)$$

eine Abbildung von $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$. Nach *Taylor* gilt:

³ Ähnliche Untersuchungen wurden durchgeführt von F. Dueball [Math. Nachr. 3, 71—76 (1950)] sowie von L. Redei und T. Szele [Acta math. 79, 291—320 (1947) und 82, 209—241 (1950)]. Wir verwenden diese Arbeiten aber nicht.

$$g(k + px) \equiv \sum_{v=0}^{e-1} \frac{g^{(v)}(k)}{v!} p^v x^v \bmod p^e \quad \text{alle } \frac{g^{(v)}(k)}{v!} \text{ ganz} \quad (6)$$

also läßt sich die Abbildung (5) so schreiben:

$$k + px \rightarrow \sum_{v=0}^{e-1} \bar{c}_{kv} p^v x^v \bmod p^e \quad (7)$$

Die Abbildung (7) setzt sich zusammen aus p ganzzahligen Polynomabbildungen, die man für $k = 0, 1 \dots p-1$ erhält, und zu jeder dieser Polynomabbildungen von (7) kann man nach Belieben Restpolynome $\bmod p^e$ addieren, ohne sie zu verändern. Insbesondere kann man zunächst ein geeignetes Vielfaches von $\bar{s}_{e-1}(x)$, dann ein geeignetes Vielfaches von $\bar{s}_{e-2}(x)$ usw. abziehen und dadurch die Abbildung (5) tatsächlich auf die Gestalt (1) mit Koeffizienten c_{kv} , welche (2) erfüllen, bringen.

b) Es mögen

$$k + px \rightarrow \sum_{v=0}^{e-1} c_{kv} p^v x^v \bmod p^e \quad \text{und} \quad k + px \rightarrow \sum_{v=0}^{e-1} \bar{c}_{kv} p^v x^v \bmod p^e$$

aus (1) dieselbe Abbildung darstellen, dann gilt:

$$g_k(x) = \sum_{v=0}^{e-1} (c_{kv} - \bar{c}_{kv}) p^v x^v \equiv 0 \bmod p^e; \quad k=0, 1 \dots p-1; \quad x=0, 1 \dots p^{e-1}-1$$

nun ist aber ersichtlich

$$g_k(x + yp^{e-1}) \equiv g_k(x) \bmod p^e$$

daher ist jedes $g_k(x)$ Restpolynom $\bmod p^e$. Ist $(c_{k\mu} - \bar{c}_{k\mu})$ der höchste nichtverschwindende Koeffizient von $g_k(x)$, so gilt nach dem Hilfssatz:

$$|c_{k\mu} - \bar{c}_{k\mu}| \geq p^{e-\mu-\varepsilon(\mu)}$$

was im Widerspruch mit (2) steht, so daß also stets $c_{k\mu} = \bar{c}_{k\mu}$ gilt.

c) Wir setzen $c = \Pi v$, wo v ein primes Restsystem $\bmod p^e$ durchläuft, und bestimmen $\bar{c}$ aus $c\bar{c} \equiv 1 \bmod p^e$. Nun bilden wir uns das Polynom

$$t_{00}(x) = \bar{c} \Pi (x + v) \quad v \text{ durchläuft ein primes Restsystem } \bmod p^e \quad (8)$$

daraus die Polynome

$$t_{0v}(x) = [xt_{00}(x)]^v \quad v = 1, 2 \dots e-1 \quad (9)$$

und aus (8) und (9) die Polynome

$$t_{\mu v}(x) = t_{0v}(x - \mu) \text{ für } 0 \leq \mu < p \text{ und } 0 \leq v < e \quad (10)$$

Ersichtlich gilt:

$$t_{00}(r) \equiv \begin{cases} 1 \bmod p^e & \text{für } r \equiv 0 \bmod p \\ 0 \bmod p^e & \text{für } r \not\equiv 0 \bmod p \end{cases} \quad (8a)$$

$$t_{0\nu}(r) \equiv \begin{cases} r^\nu \bmod p^e & \text{für } r \equiv 0 \bmod p \\ 0 \bmod p^e & \text{für } r \not\equiv 0 \bmod p \end{cases} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}(\mu + r) &\equiv r^\nu \bmod p^e & \text{für } r \equiv 0 \bmod p \\ t_{\mu\nu}(r) &\equiv 0 \bmod p^e & \text{für } r \not\equiv \mu \bmod p \end{aligned} \quad (10a)$$

Wir bilden uns nun zu gegebener Abbildung (1) das Polynom:

$$g(x) = \sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{e-1} c_{\mu\nu} t_{\mu\nu}(x)$$

Nach (10a) gilt:

$$g(k + px) \equiv \sum_{\nu=0}^{e-1} c_{k\nu} t_{k\nu}(k + px) \equiv \sum_{\nu=0}^{e-1} c_{k\nu} p^\nu x^\nu \bmod p^e \text{ für } 0 \leq k < p$$

also läßt sich die Abbildung (1) auch schreiben als:

$$i \rightarrow g(i) \bmod p^e$$

und gehört daher zu $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$.

Bemerkung: Satz I ermöglicht die Berechnung der Zahl $\beta(p^e)$ der Elemente von $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$. Bezeichnet nämlich t die größte natürliche Zahl mit $t + \varepsilon(t) < e$, so gilt:

$$\beta(p^e) = p^{p^T} \quad T = \sum_{\nu=0}^t (e - \nu - \varepsilon(\nu)) \quad (11)$$

Wir haben nun in [1] für $\beta(p^e)$ als Anzahl der Elemente der zur Halbgruppe $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$ isomorphen Halbgruppe $\mathfrak{H}_{p^e}$ auf Seite 220 gefunden:

$$\beta(p^e) = p^{p^R} \quad R = \sum_{\nu=0}^s (e - \varepsilon(\nu p)) \quad (12)$$

wenn s die größte natürliche Zahl mit $\varepsilon(sp) < e$ ist. Der Vergleich von (11) und (12) ergibt:

$$R = T$$

woraus nach leichter Rechnung die Beziehung folgt:

$$\sum_{\nu=0}^s \varepsilon(\nu p) - \sum_{\nu=0}^t \varepsilon(\nu) = e(s - t) + \frac{t(t+1)}{2}$$

§ 2. Nun betrachten wir die Bildelemente der Gruppe $\mathfrak{G}_{p^e}$ in $\bar{\mathfrak{H}}_{p^e}$ — sie bilden eine zu $\mathfrak{G}_{p^e}$ isomorphe Permutationsgruppe $\bar{\mathfrak{G}}_{p^e}$ — und beweisen darüber folgenden

Satz II: Nimmt man alle die Abbildungen (1) aus Satz I, bei denen die c_{k0} ein volles Restsystem mod p bilden und alle c_{k1} zu p prim sind, so erhält man jede Abbildung von $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ genau einmal, aber keine weiteren Abbildungen.

Beweis: Ist eine beliebige Abbildung (1) gegeben und $g(x)$ ein Polynom, das diese Abbildung erzeugt, so gilt nach (6)

$$\sum_{v=0}^{e-1} \frac{g^{(v)}(k)}{v!} p^v x^v \equiv \sum_{v=0}^{e-1} c_{kv} p^v x^v \pmod{p^e} \text{ für } 0 \leq k < p \text{ und jedes } x \quad (13)$$

also auch

$$g(k) \equiv c_{k0} \pmod{p^e} \text{ und } g'(k) \equiv c_{k1} \pmod{p} \text{ für } 0 \leq k < p \quad (14)$$

Ist nun (1) eine Abbildung aus $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$, so erzeugt $g(x)$ ein volles Restsystem mod p^e , nach Hilfssatz 8 aus [1] sind daher die Bedingungen von Satz II erfüllt, und sind diese umgekehrt erfüllt, so gehört die Abbildung zu $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$.

Wir berechnen aus Satz II die Ordnung von $\mathfrak{G}_{p^e}$ und erhalten dabei:

$$o(\mathfrak{G}_{p^e}) = \frac{\beta(p^e) p! p^{(e-1)p} (p-1)^p p^{(e-2)p}}{p^{ep} p^{(e-1)p}} = \frac{p!(p-1)^p \beta(p^e)}{p^{2p}} \quad (15)$$

Satz III: Man erhält jede Abbildung von $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ genau einmal, aber keine weiteren Abbildungen, wenn man in

$$k + px \rightarrow b_k + p(a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \dots + p^{e-2}a_{ke-1}x^{e-1}) \pmod{p^e} \quad (16)$$

$$0 \leq k < p \quad 0 \leq x < p^{e-1}$$

die b_k alle Permutationen der Zahlen $0, 1, \dots, p-1$ annehmen läßt und die a_{kv} unabhängig voneinander folgende Werte durchlaufen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_{k0} < p^{e-1} \\ 0 &\leq a_{k1} < p^{e-1} & a_{k1} \not\equiv 0 \pmod{p} \\ 0 &\leq a_{kv} < p^{e-v-\varepsilon(v)} & \text{für } v \geq 2 \end{aligned} \quad (17)$$

Beweis: Wir können jede Abbildung von $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ nach Satz II in der Gestalt (1) darstellen mit Koeffizienten c_{kv} , die die Bedingungen dieses Satzes erfüllen und innerhalb der Grenzen von Satz I liegen. Da nun stets gilt:

$$c_{k0} = b_k + pa_{k0} \text{ mit } 0 \leq b_k < p \quad 0 \leq a_{k0} < p^{e-1}$$

kann man (1) in (16) umformen, wobei wie ersichtlich die Koeffizientenbedingungen von Satz III stets erfüllt sind. Umgekehrt läßt sich jede Abbildung (16) in (1) umformen, wobei die Bedingungen von Satz II

erfüllt sind und die Koeffizienten in den Grenzen von Satz I liegen, woraus sogleich die Behauptung folgt.

§ 3. Es seien nun zwei Abbildungen F und G von $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ gegeben. Beide besitzen eine eindeutige Darstellung der Gestalt (16); wir schreiben diese Darstellungen abgekürzt folgendermaßen an:

$$\begin{aligned} F & k + px \rightarrow b_k + pf_k(x) \pmod{p^e} \\ G & k + px \rightarrow c_k + pg_k(x) \pmod{p^e} \end{aligned}$$

Auch FG ist eine Abbildung aus $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$, besitzt also ebenfalls eine eindeutige Darstellung der Gestalt (16), etwa folgende:

$$k + px \rightarrow d_k + ph_k(x) \pmod{p^e} \quad (18)$$

Nun erhalte ich die Abbildung FG aber auch⁴, indem ich erst G , dann F vornehme, sie kann also auch geschrieben werden in der Gestalt:

$$k + px \rightarrow b_{c_k} + pf_{c_k}(g_k(x)) \pmod{p^e} \quad (19)$$

Der Vergleich von (18) und (19) ergibt sofort:

$$d_k = b_{c_k} \quad (20a)$$

$$h_k(x) \equiv f_{c_k}(g_k(x)) \pmod{p^{e-1}} \text{ für jedes ganze } x \quad (20b)$$

Die Gleichung (20b) benützen wir zum Beweis des folgenden

Satz IV: Alle die Elemente von $\mathfrak{G}_{p^{e-1}}$, welche ein Repräsentantenpolynom der Gestalt

$$f(x) = a_0 + a_1x + pa_2x^2 + \dots + p^{e-2}a_{e-1}x^{e-1} \quad (21)$$

besitzen, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{T}_{p^{e-1}}$ von $\mathfrak{G}_{p^{e-1}}$. Man erhält ein genaues Repräsentantensystem von $\mathfrak{T}_{p^{e-1}}$, wenn man in (21) jeden Koeffizienten a_v die in (17) für a_{k_v} zugelassenen Werte annehmen läßt.

Beweis: Zunächst sei ein Element $F \in \mathfrak{G}_{p^{e-1}}$ mit einem Repräsentanten $\bar{f}(x)$ der Gestalt (21) gegeben. Wir bilden uns aus den Restpolynomen mod p^e von (3) mit durch (4) gegebenem t_0 die Restpolynome mod p^{e-1} :

$$\frac{s_i(x)}{p} = t_0 p^{i-1} x^i + t_1 p^{i-2} x^{i-1} + \dots + t_{i-1} x + \bar{t}_i \quad (22)$$

Durch Abziehen geeigneter Vielfacher der Restpolynome (22) von $\bar{f}(x)$ können wir nun ähnlich wie beim Beweis von Satz I, a einen Repräsentanten für F der Gestalt (21) finden, dessen Koeffizienten innerhalb der

⁴ Wir definieren hier anders als in [1] das Produkt FG zweier Restklassen nach dem Ideal der Restpolynome mod p^e als die durch $f(g(x))$ repräsentierte Restklasse, wenn $f(x) \in F$, $g(x) \in G$ ist und analog als Produkt der eindeutigen Abbildungen $i \rightarrow f(i)$ und $i \rightarrow g(i)$ die Abbildung $i \rightarrow f(g(i))$. Das auf diese Art erhaltene $\mathfrak{G}_{p^e}$ ist zum $\mathfrak{G}_{p^e}$ von [1] invers isomorph.

Grenzen von (17) liegen. Dieser Repräsentant erzeugt ein volles Restsystem mod p^{e-1} , nach Hilfssatz 8 aus [1] also auch ein solches mod p , daher muß das a_1 dieses Repräsentanten zu p prim sein.

Umgekehrt repräsentiert jedes Polynom (21) mit Koeffizienten aus (17) nach eben diesem Hilfssatz 8 von [1] wegen $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ tatsächlich ein Element aus $\mathfrak{G}_{p^{e-1}}$.

Wenn zwei dieser Polynome $f(x)$ und $g(x)$ dasselbe Element von $\mathfrak{G}_{p^{e-1}}$ repräsentieren, so müssen

$$k + p x \rightarrow k + pf(x) \pmod{p^e} \quad 0 \leq k < p$$

und

$$k + p x \rightarrow k + pg(x) \pmod{p^e} \quad 0 \leq k < p$$

dieselbe Abbildung von $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ darstellen, nach Satz III sind daher $f(x)$ und $g(x)$ identisch.

Sind schließlich $f(x)$ und $g(x)$ zwei Polynome (21) mit Koeffizienten aus (17), so bilden wir ebenfalls die beiden Abbildungen

$$k + p x \rightarrow k + pf(x) \pmod{p^e} \quad 0 \leq k < p$$

und

$$k + p x \rightarrow k + pg(x) \pmod{p^e} \quad 0 \leq k < p$$

von $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$. Nach (20b) gilt dann

$$f(g(x)) \equiv h(x) \pmod{p^{e-1}} \quad \text{für jedes ganze } x$$

und $h(x)$ besitzt auch die Gestalt (21).

Aus Satz III zusammen mit Satz IV erkennen wir: Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ und allen $p + 1$ -Tupeln:

$$(\Pi; T_k) \quad \Pi \in \mathfrak{S}_p; \quad T_k \in \mathfrak{L}_{p^e-1} \quad k = 0, 1 \dots p-1 \quad (23)$$

Sind den Elementen F, G aus $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ die $p + 1$ -Tupel $(\Pi; T_k)$ und $(\Psi; U_k)$ zugeordnet, so ist dem FG nach (19) folgendes $p + 1$ -Tupel zugeordnet:

$$(\Pi\Psi; T_{\psi|k} U_k) \quad (24)$$

Die Verknüpfungsregel (24) ermöglicht uns, die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}$ mit einem schon mehrmals untersuchten Typ von Gruppen in Beziehung zu setzen. Ordnen wir nämlich dem $p + 1$ -Tupel $(\Pi; T_k)$ folgende monomiale Matrix zu:

$$\Phi = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & & & \\ 0 \dots T_0^{-1} & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & T_1^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{-1} \quad (25)$$

wo also T_v^{-1} stets in die Spalte mit der Nummer $b_v = II/v$ zu stehen kommt, so erhalten wir dadurch eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{G}_{p^e}$ auf die monomiale Matrixgruppe, die man erhält, wenn man in den regulären Darstellungsmatrizen von $\mathfrak{S}_p$ die Einser auf jede mögliche Art durch Elemente von $\mathfrak{T}_{p^e-1}$ ersetzt⁵ und man rechnet unschwer nach, daß diese Zuordnung ein Isomorphismus ist. Bezeichnen wir diese monomiale Matrixgruppe nach Ore als Symmetrie $\Sigma_p(\mathfrak{T}_{p^e-1})$, so erhalten wir damit folgenden

Satz V: Die Gruppe $\mathfrak{G}_{p^e}$ ist stets isomorph zur Symmetrie $\Sigma_p(\mathfrak{T}_{p^e-1})$.

§ 4. Aus den bisherigen Ausführungen geht hervor, daß es für die Untersuchung von $\mathfrak{G}_{p^e}$ vor allem darauf ankommt, die Gruppe $\mathfrak{T}_{p^e}$ für $e \geq 1$ zu betrachten. Wir wollen uns hier damit begnügen, einige einfache Aussagen über diese Gruppe anzuführen, die ohne Mühe aus den bisherigen Resultaten folgen:

a) Die Ordnung von $\mathfrak{T}_{p^e}$ ergibt sich nach Satz IV unter Beachtung von (17) und Ersetzung von $e - 1$ durch e oder nach Satz V. Wir wählen den zweiten Weg zu ihrer Berechnung:

$$o(\mathfrak{T}_{p^e}) = \sqrt[p]{\frac{o(\mathfrak{G}_{p^{e+1}})}{p!}} = \frac{p-1}{p^2} \sqrt[p]{\beta(p^{e+1})} = (p-1) p^{U-2}$$

nach (15) und (12), wenn

$$U = \sum_{v=0}^{\sigma} (e+1 - \varepsilon(vp)) \quad \sigma \text{ größte Zahl mit } \varepsilon(\sigma p) < e+1$$

gesetzt wird.

b) Die Gruppe $\mathfrak{T}_p$ ist identisch mit der Untergruppe $\mathfrak{M}_p$ von $\mathfrak{G}_p$, die aus allen Elementen vom Grad 1 besteht⁶, also vollständig bekannt.

c) Die Gruppe $\mathfrak{T}_{p^e}$ läßt sich stets homomorph abbilden auf $\mathfrak{T}_{p^e-1}$. Denn betrachtet man die nach Satz VIII von [1] mögliche homomorphe Abbildung $\mathfrak{G}_{p^e} \rightarrow \mathfrak{G}_{p^e-1}$, so erkennt man sogleich, daß dabei jedes $F \in \mathfrak{T}_{p^e}$ ein $\bar{F} \in \mathfrak{T}_{p^e-1}$ als Bild erhält. Ist umgekehrt irgendein $\bar{F} \in \mathfrak{T}_{p^e-1}$ gegeben, so wählen wir einen Repräsentanten $f(x)$ dieses Elementes nach (21) mit (17). Dieses $f(x)$ repräsentiert wegen $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ nach Hilfssatz 8 aus [1] auch ein Element $F \in \mathfrak{T}_{p^e}$, welches $\bar{F}$ zum Bild hat.

⁵ Derartige Gruppen wurden untersucht von W. Specht [Schriften d. math. Sem. Berlin 1, 1—32 (1932) und Math. Z. 37, 321—341 (1933)], insbesondere jedoch von O. Ore [Trans. Amer. Math. Soc. 51, 15—64 (1942)], von dem auch der Name „Symmetry“ für diese Gruppe eingeführt wurde.

⁶ Man vergleiche § 4 in [1].

d) Die Gruppe $\mathfrak{I}_{p^e}$ ist stets auflösbar. Denn nach c) ist eine homomorphe Abbildung $\mathfrak{I}_{p^e} \rightarrow \mathfrak{I}_p$ möglich; der Normalteiler der dabei auf das Einheitselement abgebildeten Elemente sei $\mathfrak{N}$. Dann besitzt also $\mathfrak{I}_{p^e}$ folgende Normalkette:

$$\mathfrak{I}_{p^e}, \mathfrak{N}, E$$

mit den Faktoren $\mathfrak{I}_p, \mathfrak{N}$. Bekanntlich ist $\mathfrak{I}_p$ auflösbar und $\mathfrak{N}$ ist eine p -Gruppe, also auch auflösbar, woraus sich sogleich die Auflösbarkeit von $\mathfrak{I}_{p^e}$ ergibt.

Zur Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von

J. Heinhold, München.

(Eingelangt am 16. Februar 1955.)

Die numerische Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen erfordert vielfach zunächst eine Abschätzung der Lage der Wurzeln in der komplexen Zahlenebene. Es gibt eine große Zahl von Abschätzungen des Absolutbetrages der Wurzeln und einfache Kriterien für die Lage der Wurzeln hinsichtlich des Einheitskreises. Im folgenden werden weitere Abschätzungen des Absolutbetrages der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten, sowie Kriterien für die Lage der Wurzeln bezüglich des Einheitskreises angegeben. Sie enthalten als Spezialfall die bekannte Abschätzung von *Takeya* [1] und *Hurwitz* [2] für Polynome mit positiven Koeffizienten, sowie ein Kriterium von *Takahashi* [3] und das bekannte Kriterium von *Eneström* [4] — *Takeya* [1] für die Lage der Nullstellen zum Einheitskreis. Ferner wird noch die Frage untersucht, wann die angegebenen Schranken „scharf“ sind, d. h. Nullstellen auf den Rändern der angegebenen Kreisbereiche gelegen sind.

1.

Gegeben sei das Polynom n -ten Grades ($n \geq 1$) mit reellen Koeffizienten a_ν , $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$,

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu. \quad (1)$$

Wir bilden mit einem weiteren Polynom m -ten Grades ($1 \leq m < n$) mit reellen Koeffizienten p_μ , $p_0 > 0$, $p_m \neq 0$,

$$p(z) = p_0 - \sum_{\mu=1}^m p_\mu z^\mu \quad (2)$$

$$f(z) p(z) = a_0 p_0 - \sum_{\lambda=1}^{n+m} b_\lambda z^\lambda = Q(z). \quad (3)$$

Hierbei ist

$$b_{\lambda} = \sum_{\mu=1}^m a_{\lambda-\mu} p_{\mu} - a_{\lambda} p_0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n+m), \quad (4)$$

wobei hier, wie im folgenden, alle a_{ν} mit einem Index < 0 oder $> n$ und alle p_{μ} mit einem Index $> m$ gleich Null zu setzen sind. Da $n \geq 1$ ist, können die b_{λ} nicht sämtlich verschwinden, insbesondere ist $b_{n+m} = a_n p_m \neq 0$. Unter den Bedingungen

$$b_{\lambda} \geq 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots, n+m \quad (5)$$

gilt die Abschätzung

$$|f(z) p(z)| \geq a_0 p_0 - \sum_{\lambda=1}^{n+m} b_{\lambda} |z|^{\lambda} = Q(|z|) = f(|z|) p(|z|). \quad (6)$$

$Q(z)$ hat in den Koeffizienten nur einen Vorzeichenwechsel, also nur eine positive Nullstelle.

Wir stellen nun den Koeffizienten p_{μ} neben der Bedingung $p_0 > 0$ und den Bedingungen (5) noch die Bedingung:

$$p(z) \text{ besitze nur eine positive Nullstelle } z = r. \quad (7)$$

Wegen (6) ist diese Nullstelle mit der einzigen positiven Nullstelle von $Q(z)$ identisch. Da $Q(0) > 0$ ist, bleibt daher $Q(|z|)$ und damit auch $|f(z)|$ für $|z| < r$ stets positiv. Unter den gestellten Bedingungen können daher die Wurzeln von $f(z)$ nur in $|z| \geq r$ gelegen sein.

Setzen wir in

$$f_1(z) = z^n f(1/z) = \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu} z^{\nu}, \quad (8)$$

indem wir das gegebene Polynom $f(z)$ nötigenfalls mit -1 multiplizieren, $a_n > 0$, $a_0 \neq 0$ voraus, so erhalten wir analog mit

$$b'_{\lambda} = \sum_{\mu=1}^m a_{n-\lambda+\mu} p_{\mu} - a_{n-\lambda} p_0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n+m), \quad (9)$$

$$f_1(z) p(z) = a_n p_0 - \sum_{\lambda=1}^{n+m} b'_{\lambda} z^{\lambda} = Q_1(z) \quad (10)$$

unter den Bedingungen

$$b'_{\lambda} \geq 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots, n+m \quad (11)$$

wieder

$$|f_1(z) p(z)| \geq a_n p_0 - \sum_{\lambda=1}^{n+m} b'_{\lambda} |z|^{\lambda} = Q_1(|z|) = f_1(|z|) p(|z|). \quad (12)$$

Auch die b'_{λ} können nicht sämtlich verschwinden, insbesondere ist

$b'_{n+m} \neq 0$. Stellen wir für $p(z)$ wieder die Forderung (7), so ergibt sich in gleicher Weise, daß die Nullstellen von $f_1(z)$ sämtlich in $|z| \geq r$, also die Nullstellen von $f(z)$ sämtlich in $|z| \leq 1/r$ gelegen sind. Zusammenfassend haben wir somit

Satz 1: Ist $p(z) = p_0 - \sum_{\mu=1}^m p_{\mu} z^{\mu}$, $p_0 > 0$, ein Polynom mit reellen Koeffizienten, das genau eine positive Nullstelle r besitzt, so gilt für die Nullstellen des Polynoms $f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$, falls seine Koeffizienten den Bedingungen

$$(A) \begin{cases} a_n > 0, \quad a_0 \neq 0 \\ b'_\lambda = \sum_{\mu=1}^m a_{n-\lambda+\mu} p_\mu - a_{n-\lambda} p_0 \geq 0, \lambda = 1, 2, \dots, n+m \end{cases}$$

bzw.

$$(B) \begin{cases} a_0 > 0, \quad a_n \neq 0 \\ b_\lambda = \sum_{\mu=1}^m a_{\lambda-\mu} p_\mu - a_\lambda p_0 \geq 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n+m \end{cases}$$

genügen, die Abschätzungen $|z| \leq 1/r$ bzw. $|z| \geq r$. (Dabei sind in den Bedingungen (A) und (B) Koeffizienten a_ν mit $\nu < 0$ und $\nu > n$ durch Null zu ersetzen).

Ausführlich geschrieben lauten die Bedingungen (A)

$$\begin{array}{rcl}
a_n > 0, & & \\
& a_n p_2 & + a_{n-1} p_1 \geq a_{n-1} p_0 \\
& \dots & \\
& a_n p_{m-1} + \dots + a_{n-m+3} p_2 + a_{n-m+2} p_1 & \geq a_{n-m+1} p_0 \\
a_n p_m + a_{n-1} p_{m-1} + \dots + a_{n-m+2} p_2 + a_{n-m+1} p_1 & \geq a_{n-m} p_0 \\
& \dots & \\
a_m p_m + a_{m-1} p_{m-1} + \dots + a_2 p_2 & + a_1 p_1 & \geq a_0 p_0 \\
a_{m-1} p_m + a_{m-2} p_{m-1} + \dots + a_1 p_2 & + a_0 p_1 & \geq 0 \\
a_{m-2} p_m + a_{m-3} p_{m-1} + \dots + a_0 p_2 & & \geq 0 \\
& \dots & \\
a_1 p_m + a_0 p_{m-1} & & \geq 0 \\
a_0 p_m & & \geq 0
\end{array}$$

Ersetzen wir hierin a_ν durch $a_{n-\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$), so erhalten wir die Bedingungen (B).

Die Bedingung (7) ist z. B. stets erfüllt, wenn die p_μ nicht negativ gewählt werden. Damit lassen sich etwa bei positiven Koeffizienten a_ν auch stets die Bedingungen (A) bzw. (B) erfüllen. Man kann $p_0 = 1$

annehmen und wird darnach trachten, möglichst große r zu erhalten, also mit möglichst kleinen p_μ auszukommen. Dabei genügt meist eine Abschätzung von r .

Beispiel: $f(z) = 2z^6 + z^5 + 2,5 z^4 + 6 z^3 + 5 z^2 + 10 z + 7$. Die Bedingungen (A) lassen sich mit $p_0 = 1$ und $p_1 = 0,5$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$, also $p(z) = 1 - 0,5 z - z^2 - 2z^3$ erfüllen. Wegen $p(4/7) > 0$ ist sicher $r > 4/7$, daher gilt für die Nullstellen von $f(z)$ die Abschätzung $|z| < 7/4$. Die Bedingungen (B) sind z. B. mit $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, also $p(z) = 1 - 2z$ erfüllt, somit gilt für die Nullstellen die Abschätzung $0,5 \leq |z|$. Verwenden wir (B) mit zwei Parametern, so kann man p_1 kleiner nehmen, etwa $p_1 = 1,5$, $p_2 = 0,2$ und erhält $p(z) = 1 - 1,5z - 0,2z^2$ mit einer positiven Wurzel $r > 0,61$, also die Abschätzung $0,61 < |z| < 1,75$.

Man wird bei positiven Koeffizienten in (A) und (B) zunächst mit einem kleinen m beginnen und nötigenfalls weitere Parameter p_μ , von denen auch einige verschwinden können, hinzunehmen.

Die Anwendung des Satzes 1 ist jedoch nicht auf Polynome mit positiven Koeffizienten beschränkt. Wir werden im folgenden Spezialisierungen dieses Satzes betrachten, um unter einfacheren Bedingungen zu übersichtlicheren Abschätzungen und Kriterien zu gelangen. Zunächst untersuchen wir für den allgemeinen Fall, im Anschluß an A. Hurwitz [2] und W. Schulz [5], unter welchen Bedingungen Nullstellen von $f(z)$ auf den Rändern der nach Satz 1 zu erhaltenden Kreisbereiche gelegen sind.

2.

$f(z)$ genüge den Bedingungen (B) von Satz 1 und besitze eine Nullstelle $\zeta = r e^{i\vartheta}$ (ϑ reell). Dann ist nach (3) $Q(r e^{i\vartheta}) = 0$ und nach (6) auch $Q(r) = 0$. Da $a_0 p_0 > 0$ ist, gilt somit

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{n+m} b_\lambda r^\lambda e^{i\vartheta\lambda} \right| = \sum_{\lambda=1}^{n+m} |b_\lambda r^\lambda e^{i\vartheta\lambda}|.$$

Diese Beziehung gilt aber dann und nur dann, wenn

$$b_\lambda r^\lambda e^{i\vartheta\lambda} = s \cdot t_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n+m), \quad (13)$$

wobei t_λ reelle nicht negative Zahlen und s eine nichtverschwindende reelle oder komplexe Zahl ist. Die b_λ und damit die t_λ können nicht sämtlich verschwinden, insbesondere ist nach S. 1 die Größe $t_{n+m} \neq 0$. Aus $Q(r e^{i\vartheta}) = 0$ folgt

$$a_0 p_0 = s(t_1 + t_2 + \dots + t_{n+m}). \quad (14)$$

Daher ist s eine positive Zahl, somit nach (13)

$$e^{i\vartheta(n+m)} = 1. \quad (15)$$

Falls also $f(z)$ eine Nullstelle $z = r e^{i\vartheta}$ besitzt, muß $e^{i\vartheta}$ eine $n + m$ -te Einheitswurzel sein, deren Ordnung ein Teiler von $n + m$ ist. Ferner ist

$$Q'(z) = f'(z) p(z) + f(z) p'(z) = - \sum_{\lambda=1}^{n+m} \lambda b_{\lambda} z^{\lambda-1},$$

also für $z = r$

$$f(r) p'(r) \neq 0.$$

$z = r$ kann daher unter den Bedingungen (B) nicht Nullstelle von $f(z)$ sein. Ferner ist, falls $\zeta = r e^{i\vartheta}$ Nullstelle von $f(z)$ ist wegen (13)

$$Q'(\zeta) = f'(\zeta) p(\zeta) = - \sum_{\lambda=1}^{n+m} \lambda b_{\lambda} r^{\lambda-1} e^{i\vartheta(\lambda-1)} = - \frac{s}{r} e^{-i\vartheta} \sum_{\lambda=1}^{n+m} \lambda t_{\lambda} \neq 0.$$

Dieselben Überlegungen lassen sich auch unter den Bedingungen (A)

für $f_1(z)$ und $Q_1(z)$ mit $\zeta = \frac{1}{r} e^{-i\vartheta}$ durchführen. Damit erhalten wir

Satz 2: Erfüllt $f(z)$ die Bedingungen (A) bzw. (B) von Satz 1, so ist $f(1/r)$ bzw. $f(r) \neq 0$ und die Nullstellen auf $|z| = 1/r$ bzw. $|z| = r$, falls solche vorhanden sind, können nur einfache Nullstellen $\zeta = \frac{1}{r} \varepsilon$ bzw. $\zeta = r \varepsilon$ sein, wobei ε eine $n + m$ -te Einheitswurzel darstellt, deren Ordnung ein Teiler von $n + m$ ist.

$\zeta = \frac{1}{r} e^{-i\vartheta}$ bzw. $\zeta = r e^{i\vartheta}$ sei unter den Bedingungen (A) bzw. (B) eine Nullstelle von $f(z)$. Ist k die kleinste natürliche Zahl für die $e^{-i\vartheta k} = 1$ ist, so ist nach dem Vorhergehendem $1 < k \leq n + m$ und nach (15) k ein Teiler von $n + m$, $qk = n + m$. Dann müssen alle b_{λ} , deren Indizes keine Vielfachen von k sind, verschwinden, also die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$b_{\kappa k+1} = b_{\kappa k+2} = \dots = b_{\kappa k+k-1} = 0, b_{(\kappa+1)k} > 0 \quad (16)$$

für $\kappa = 0, 1, 2, \dots, q-1$.

Analoge Bedingungen gelten für b'_{λ} . Wir haben somit

Satz 3: Notwendig für die Existenz von Nullstellen von $f(z)$ auf dem Kreise $|z| = 1/r$ bzw. $|z| = r$ von Satz 1 ist die Existenz eines Teilers k von $n + m = qk$, $1 < k \leq n + m$, so daß unter den Bedingungen (A)

$$(16') \quad b'_{\kappa k+1} = b'_{\kappa k+2} = \dots = b'_{\kappa k+k-1} = 0, b'_{(\kappa+1)k} > 0$$

bzw. unter den Bedingungen (B)

$$(16) \quad b_{\kappa\kappa+1} = b_{\kappa\kappa+2} = \dots = b_{\kappa\kappa+k-1} = 0, \quad b_{(\kappa+1)\kappa} > 0$$

ist für $\kappa = 0, 1, 2, \dots, q-1$.

Ist $p(r \varepsilon_k) \neq 0$, für irgendeine k -te Einheitswurzel ε_k , so sind die Bedingungen (16') bzw. (16) auch hinreichend für die Existenz einer Nullstelle von $f(z)$ auf $|z| = 1/r$, bzw. $|z| = r$.

Die letzte Tatsache folgt für (16) aus

$$Q(z) = f(z) p(z) = a_0 p_0 - b_k z^k - b_{2k} z^{2k} - \dots - b_{qk} z^{qk} = R(w), \quad w = z^k.$$

Es ist $R(r^k) = 0$, also $R(w)$ durch $w - r^k$ teilbar. Wegen $Q(z) = (z^k - r^k)G(z)$ muß daher, falls $p(r \varepsilon_k) \neq 0$ ist, $f(r \varepsilon_k)$ verschwinden. Analog für (16').

Aus Satz 3 erhält man unmittelbar

Satz 4: $f(z)$ enthält unter den Bedingungen (A) bzw. (B) sicher nur Nullstellen im Innern der angegebenen Kreisbereiche, wenn ein b'_λ bzw. b_λ für ein zu $n + m$ relativ primes λ von Null verschieden ist, desgleichen, wenn zwei aufeinander folgende b'_λ bzw. b_λ ungleich Null sind.

Als Beispiel zu Satz 3 betrachten wir das Polynom

$$f(z) = 1 + 2z + z^4 + 2z^5, \quad p(z) = 1 - 2z + z^2 - 2z^3$$

erfüllt die Bedingungen (B), dabei ist

$$b_1 = b_3 = b_5 = b_7 = 0, \quad b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = 3, \quad r = 0,5$$

ist die einzige positive Wurzel von $p(z)$. Daher ist $|z| \geq 0,5$ und nach Satz 3 mit $k = 2$ somit $\zeta = 0,5 e^{i2\pi/2} = -0,5$ die einzige Wurzel auf dem Kreis $|z| = 0,5$, wie man hier sofort verifizieren kann.

3.

3.1. Um unter einfacheren Bedingungen zu übersichtlicheren Abschätzungen zu kommen, spezialisieren wir Satz 1 zunächst auf gleiche positive $p_\mu = p$ (für $\mu = 1, 2, \dots, m$) und $p_0 = 1$. Damit erhalten wir

Satz 5: $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ sei ein Polynom mit reellen Koeffizienten, die für ein $m \geq 1$ den Bedingungen genügen

$$(A_1) \quad \sum_{\mu=1}^m a_{n-\lambda+\mu} > 0 \quad (\text{für } \lambda = 1, 2, \dots, n+m)$$

bzw.

$$(B_1) \quad \sum_{\mu=1}^m a_{\lambda-\mu} > 0 \quad (\text{für } \lambda = 1, 2, \dots, n+m),$$

so liegen die Wurzeln von $f(z)$ sämtlich in $|z| \leq 1/r$ bzw. $|z| \geq r$, wobei r

jeweils die einzige positive Wurzel von $p(z) = 1 - pz(1 + z + \dots + z^{m-1})$ mit

$$p = p_A = \max_{\lambda=0, 1, \dots, (n-1)} \left\{ \frac{a_\lambda}{\sum_{\mu=1}^m a_{\lambda+\mu}} \right\} \quad \text{bzw.} \\ p = p_B = \max_{\lambda=1, 2, \dots, n} \left\{ \frac{a_\lambda}{\sum_{\mu=1}^m a_{\lambda-\mu}} \right\}$$

darstellt. ($a_\nu = 0$ für $\nu < 0$ und $\nu > n$).

Ist $m > 1$, so kann in den Abschätzungen des Betrages nur das Ungleichheitszeichen gelten.

Mit den angegebenen p -Werten sind nämlich unter den Bedingungen (A_1) und (B_1) die Bedingungen (A) bzw. (B) von Satz 1 sämtlich erfüllt. Ist $m > 1$, so sind hier die beiden letzten Koeffizienten b'_λ bzw. b_λ , nämlich für $\lambda = n + m$ und $\lambda = n + m - 1$, positiv. Daher kann nach Satz 4 eine Wurzel von $f(z)$ nur im Innern der angegebenen Kreisebereiche gelegen sein. W. z. b. w.

Im Falle $m = 1$ gehen (A_1) und (B_1) in die Forderung über, daß alle Koeffizienten positiv sein sollen. Es ist hier

$$p_A = \max_{\lambda=0, 1, \dots, (n-1)} \left\{ \frac{a_\lambda}{a_{\lambda+1}} \right\} \quad \text{bzw.} \quad p_B = \max_{\lambda=1, 2, \dots, n} \left\{ \frac{a_\lambda}{a_{\lambda-1}} \right\},$$

ferner $p(z) = 1 - pz$; $\frac{1}{r} = p$ bzw. $r = \frac{1}{p}$. Satz 5 enthält also als Spezialfall die bekannte Abschätzung von *Hurwitz-Kakeya* für die Nullstellen von Polynomen mit positiven Koeffizienten:

$$\min_{\lambda=0, 1, \dots, n-1} \left\{ \frac{a_\lambda}{a_{\lambda+1}} \right\} \leq |z| \leq \max_{\lambda=0, 1, \dots, n-1} \left\{ \frac{a_\lambda}{a_{\lambda+1}} \right\}. \quad (17)$$

Mit $m > 1$ kann Satz 5 jedenfalls für positive Koeffizienten, aber auch für Polynome mit beliebigen reellen Koeffizienten Verwendung finden, wenn sich nur die Bedingungen (A_1) und (B_1) mit einem passenden m , $1 < m < n$, erfüllen lassen.

Beispiele: 1. $f(z) = z^7 + 1,5 z^6 + 2 z^4 + 1,5 z^3 - 0,5 z^2 + z + 1$
Satz 5 liefert mit $m = 2$ für $p_A = 2$, $p_B = 3$ und damit $p(z) = 1 - 2z(1+z)$ bzw. $p(z) = 1 - 3z(1+z)$. Es ist also sicher $r > 1/3$ bzw. $r > 1/4$ somit gilt für die Nullstellen die Abschätzung $1/4 < |z| < 3$.

2. $f(z) = z^5 + z^4 + 3z^3 + z^2 + z + 1$ ergibt mit $m = 1$ die Abschätzung $1/3 \leq |z| \leq 3$ mit $m = 2$, $p_A = p_B = 3/2$, $p(z) = 1 - 3/2 z(z+1)$; wegen $p(9/20) > 0$ ist sicher $r > 9/20$, somit liegen die Nullstellen in $9/20 < |z| < 20/9$.

3.2. Setzen wir in Satz 1 $p_\mu \geq 0$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) und $p_0 = \sum_{\mu=1}^m p_\mu > 0$, $p_m > 0$, so ist $r = 1$ die einzige positive Wurzel von $p(z) = 0$. Wir gewinnen somit ein Kriterium für die Lage der Wurzeln des zu untersuchenden Polynoms bezüglich des Einheitskreises, nämlich

Satz 6: Ist $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sind die Koeffizienten a_v in der Folge $a_{-m} = \dots = a_{-1} = 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = \dots = a_{n+m} = 0$, ($m < n$), jeweils höchstens gleich dem mit beliebigen nicht negativen Gewichten p_μ , $\sum_{\mu=1}^m p_\mu > 0$, gebildeten arithmetischen Mittel der dem Koeffizienten a_v in dieser Folge unmittelbar nachfolgenden bzw. unmittelbar vorausgehenden m -Koeffizienten, also

$$(A_2) \left\{ \begin{array}{l} a_v \leq \frac{\sum_{\mu=1}^m a_{v+\mu} p_\mu}{\sum_{\mu=1}^m p_\mu} \quad \text{für } v = n-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -m \\ a_n > 0, a_0 > 0 \end{array} \right.$$

bzw.

$$(B_2) \left\{ \begin{array}{l} a_v \leq \frac{\sum_{\mu=1}^m a_{v-\mu} p_\mu}{\sum_{\mu=1}^m p_\mu} \quad \text{für } v = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m \\ a_0 > 0, a_n > 0, \end{array} \right.$$

so liegen sämtliche Wurzeln von $f(z)$ in $|z| \leq 1$ bzw. $|z| \geq 1$.

Satz 3 liefert notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lage von Nullstellen auf den Einheitskreis. $b'_\lambda = 0$ bzw. $b'_\lambda > 0$ bewirkt ein Gleichheitszeichen bzw. Ungleichheitszeichen in der λ -ten Ungleichung von (A_2) in der oben angegebenen Reihenfolge. Analog für b'_λ in (B_2) . Aus Satz 4 folgt

Satz 6a: Gilt in (A_2) bzw. (B_2) für ein zu $n+m$ relativ primes $n-v$ bzw. v das $<$ Zeichen oder gilt in zwei aufeinander folgenden Un-

gleichungen das $<$ Zeichen, so können die Nullstellen von $f(z)$ nur innerhalb der angegebenen Kreisebereiche gelegen sein.

Sind die Koeffizienten a_ν nichtnegative Zahlen, so können in (A_2) negative Indizes ν und in (B_2) ν -Werte $> n$ wegbbleiben.

Ferner entnehmen wir aus dem vorhergehenden Satz:

Sind die $a_\nu (\nu = 0, 1, 2, \dots, n)$ sämtlich positiv und sind die Bedingungen (A_2) bzw. (B_2) mit $m > 1$ erfüllt, so liegen die Nullstellen von $f(z)$ nur im Innern der angegebenen Kreisebereiche.

In diesem Falle ist nämlich in (A_2)

$$a_{-m} = 0 < \frac{a_0 p_m}{\sum p_\mu} \text{ und } a_{-m+1} = 0 < \frac{a_0 p_{m-1} + a_1 p_m}{\sum p_\mu}, \text{ in } (B_2)$$

$$a_{n+m} = 0 < \frac{a_0 p_m}{\sum p_\mu} \text{ und } a_{n+m-1} = 0 < \frac{a_n p_{m-1} + a_{n-1} p_m}{\sum p_\mu}.$$

Es gilt jeweils in zwei aufeinanderfolgenden Ungleichungen das $<$ Zeichen. Nach Satz 6a können daher Nullstellen von $f(z)$ nur im Innern der Einheitskreisebereiche gelegen sein.

Setzen wir sämtliche Gewichte gleich, so haben wir in Satz 6 die Bedingungen:

$$(A_3) \left\{ \begin{array}{l} a_\nu = \frac{\sum_{\mu=1}^m a_{\nu+\mu}}{m} \quad \text{für } \nu = n-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -m \\ a_n > 0, a_0 > 0 \end{array} \right.$$

$$(B_3) \left\{ \begin{array}{l} a_\nu = \frac{\sum_{\mu=1}^m a_{\nu-\mu}}{m} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m. \\ a_n > 0, a_0 > 0 \end{array} \right.$$

Beispiel:

$$f(z) = 3z^5 + z^4 - z^3 + z^2 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{10}$$

erfüllt mit $m = 3$ die Bedingungen (A_3) , also liegen die Nullstellen in $|z| \leq 1$. Da in den beiden letzten Bedingungen das $<$ Zeichen gilt, ist nach Satz 6a $|z| < 1$.

Für $m = 1$ erhalten wir aus Satz 6 den Satz von *Eneström-akeya*:

Die Nullstellen von $f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ liegen, falls

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq a_2 = \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \quad (18)$$

$m = 1$ liefert hier wieder den Spezialfall $m = 1$ von Satz 6. Wählen wir $m = 3$ und setzen speziell noch $p_0 = p_2 = 1$, $p_1 = p_3 = p > 0$, so hat $p(z) = 1 - pz + z^2 - pz^3 = (1 - pz)(1 + z^2)$ die einzige positive Nullstelle $r = 1/p$. Hier kann in (A_4) und (B_4) offensichtlich nur $p \geq 1$ in Frage kommen. Beide Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn p groß genug ist. Ist p_A das kleinste p , das die Bedingung (A_4) und p_B das kleinste p , das die Bedingung (B_4) in diesem Spezialfall erfüllt, so gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{p_B} \leq |z| \leq p_A$$

und es ist

$$p_A = \text{Max} \left\{ \frac{a_{n-1}}{a_n}; \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}}; \frac{a_{n-3} + a_{n-1}}{a_{n-2} + a_n}; \dots; \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3}; \frac{a_1}{a_0 + a_2}; \frac{a_0}{a_1} \right\} \geq 1$$

$$1/p_B = \text{Min} \left\{ \frac{a_{n-1}}{a_n}; \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}}; \frac{a_{n-3} + a_{n-1}}{a_{n-2} + a_n}; \dots; \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3}; \frac{a_1}{a_0 + a_2}; \frac{a_0}{a_1} \right\} \leq 1$$

Wir haben somit

Satz 7: Der Absolutbetrag einer jeden Nullstelle des Polynoms

$f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ mit reellen Koeffizienten und $a_0 > 0$, ist höchstens gleich der größten und mindestens gleich der kleinsten der $n + 2$ Zahlen

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}; \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}}; \frac{a_{n-3} + a_{n-1}}{a_{n-2} + a_n}; \dots; \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3}; \frac{a_1}{a_0 + a_2}; \frac{a_0}{a_1}, \quad (19)$$

falls die hier auftretenden Nenner positiv sind.

Beispiele: 1. $f(z) = 3z^5 + 3z^4 + 2z + 2$. Satz 7 liefert für die Nullstellen die Abschätzung $2/3 \leq |z| \leq 1$. In diesem Falle ist die obere Schranke „scharf“, denn $z = -1$ ist eine Nullstelle.

2. Für die Beträge der Nullstellen von

$$f(z) = 4z^5 + 5z^4 + z^3 + 2z^2 + 3z + 2$$

erhält man nach *Hurwitz-Kakeya* $1/5 \leq |z| \leq 2$, nach Satz 7: $4/7 \leq |z| \leq 7/5$.

Setzen wir in (A_4) und (B_4) alle Koeffizienten p_μ mit geradem Index gleich 1, die anderen gleich p , also

$$p(z) = (1 - pz)(1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2d}),$$

so erhalten wir als Verallgemeinerung des letzten Satzes

Satz 8: Der Betrag einer jeden Nullstelle von $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ mit reellen Koeffizienten und $a_0 > 0$, ist höchstens gleich der größten und mindestens gleich der kleinsten der Zahlen

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}+a_n}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-3}+a_{n-1}}{a_{n-2}+a_n}, \frac{a_{n-4}+a_{n-2}+a_n}{a_{n-3}+a_{n-1}}, \frac{a_{n-5}+a_{n-3}+a_{n-1}}{a_{n-4}+a_{n-2}+a_n}, \\ & \dots, \frac{a_{n-2d-1} + \dots + a_{n-1}}{a_{n-2d} + \dots + a_n}, \frac{a_{n-2d-2} + \dots + a_{n-2}}{a_{n-2d-1} + \dots + a_{n-1}}, \dots \\ & \dots, \frac{a_0 + a_2 + \dots + a_{2d}}{a_1 + a_3 + \dots + a_{2d+1}}, \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2d-1}}{a_0 + a_2 + \dots + a_{2d}}, \dots \\ & \dots, \frac{a_1 + a_3}{a_0 + a_2 + a_4}, \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3}, \frac{a_1}{a_0 + a_2}, \frac{a_0}{a_1}, \quad (2d = m-1 < n-1) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

falls die hier auftretenden Nenner positiv sind.

In gleicher Weise kann man aus Satz 1 weitere derartige Abschätzungen gewinnen. So liefert etwa

$$p(z) = (1 - p z) (1 + z^{2q} + 2^{4q} + \dots + z^{2dq}), \quad q, d$$

natürliche Zahlen, $2qd = m-1 < n-1$, wieder eine Verallgemeinerung des vorhergehenden Satzes. Diese besagt z. B. für den speziellen Fall $q = 2, d = 2$, daß die Absolutbeträge der Nullstellen von $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ mit reellen Koeffizienten a_v und $a_0 > 0$, höchstens gleich der größten und mindestens gleich der kleinsten der Zahlen

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}, \frac{a_{n-4}+a_n}{a_{n-3}}, \frac{a_{n-5}+a_{n-1}}{a_{n-4}+a_n}, \dots, \frac{a_{n-7}+a_{n-3}}{a_{n-6}+a_{n-2}}, \\ & \frac{a_{n-8}+a_{n-4}+a_n}{a_{n-7}+a_{n-3}}, \frac{a_{n-9}+a_{n-5}+a_{n-1}}{a_{n-8}+a_{n-4}+a_n}, \dots, \frac{a_0+a_4+a_8}{a_1+a_5+a_9}, \frac{a_3+a_7}{a_0+a_4+a_8} \\ & \frac{a_2+a_6}{a_3+a_7}, \dots, \frac{a_3}{a_0+a_4}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_1} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

sind, falls die auftretenden Nenner positiv ausfallen.

Der Satz 3 beantwortet sofort die Frage, wann in den Abschätzungen nach (17), (19), (20) und (21) die angegebenen Schranken „scharf“ sind. Es gilt allgemein für diese Abschätzungen der

Satz 9: Soll in der Abschätzung der Nullstellen von $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ nach (17), (19), (20), (21) die obere bzw. untere Schranke „scharf“

sein, so müssen notwendig für einen Teiler k von $n + m$, ($1 < k \leq n + m$), alle $n + m - 1$ Quotienten in der Folge (17) mit $m = 1$, (19) mit $m = 3$, (20) mit $m = 2d + 1$, (21) mit $m = 9$ bis auf den k -ten, $2k$ -ten usw. gleich dem jeweiligen Maximum R bzw. Minimum r der betreffenden Folge sein.

Im Falle (17) sind diese Bedingungen auch hinreichend, ebenso für (19), (20) und (21), falls dort noch $p(R\varepsilon_k) \neq 0$ bzw. $p(r\varepsilon_k) \neq 0$ ist, wobei ε_k irgendeine k -te Einheitswurzel darstellt.

Da nämlich in (A_4) $b'_{n+m} = a_0 p_m = a_0 p_A > 0$ ist, sind die Bedingungen (16') von Satz 3 unter den Voraussetzungen von Satz 9 sämtlich erfüllt. Ebenso sind die Bedingungen (16) wegen $b_{n+m} = a_n p_m = a_n p_B > 0$ unter diesen Voraussetzungen alle erfüllt. Für $m = 1$ ist ferner $p(z) = 1 - p_{A,B} z$, also für $z = \frac{1}{p_A}$ bzw. $z = \frac{1}{p_B} \varepsilon_k$ sicher $p(z) \neq 0$.

Die obere und die untere Schranke sind in den Abschätzungen nach (17), (19), (20), (21) dann und nur dann beide „scharf“, wenn sie zusammenfallen.

Es muß nämlich dann in den genannten Folgen der k -te, $2k$ -te usw. Quotient gleich dem Minimum und gleichzeitig gleich dem Maximum der Quotienten einer Folge sein.

Für (19) und (20) erhält man aus den ersten Ungleichungen von (A_4) und (B_4) $p_A \geq 1$ und $p_B \geq 1$. Falls daher hier beide Schranken scharf sind, liegen sämtliche Wurzeln auf dem Einheitskreis.

Beispiele: 1. $m = 1, n = 5$:

$$a) x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 4 = 0. \quad n + m = 6, k = 3$$

$$\frac{a_4}{a_5} = 2; \frac{a_3}{a_4} = 2; \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{4}; \frac{a_1}{a_2} = 2; \frac{a_0}{a_1} = 2.$$

Die obere Schranke ist scharf. $\frac{1}{4} < |z| \leq 2$.

$$b) x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\frac{a_4}{a_5} = 1; \frac{a_3}{a_4} = 1; \frac{a_2}{a_3} = 2; \frac{a_1}{a_2} = 1; \frac{a_0}{a_1} = 1.$$

Die untere Schranke ist scharf, $1 \leq |z| < 2$, wie man in beiden Fällen sofort verifiziert.

2. $m = 3$. In Beispiel 1, S. 213 erhält man $m + n = 8, k = 4$

$$\frac{a_4}{a_5} = 1; \frac{a_3 + a_5}{a_4} = 1; \frac{a_2 + a_4}{a_3 + a_5} = 1; \frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} = \frac{2}{3}; \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3} = 1; \frac{a_1}{a_0 + a_2} = 1;$$

$$\frac{a_0}{a_1} = 1.$$

Die obere Schranke ist „scharf“, wie man sofort verifiziert, da -1 eine Nullstelle ist. $\frac{2}{3} < |z| \leq 1$.

Trivialerweise gelten für die Beträge der Nullstellen von

$$f^*(z) = f(-z) = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - \dots + (-1)^n a_n z^n$$

dieselben Abschätzungen wie für $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$. So entnehmen wir etwa aus dem Beispiel S. 211 für die Wurzelbeträge von $3z^5 - z^4 - z^3 - z^2 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{10} = 0$ die Abschätzung $|z| < 1$.

Literatur.

- [1] *Takeya S.*, On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. The Tôhoku Math. Journal 2 (1912), S. 140—142.
- [2] *Hurwitz A.*, Über einen Satz des Herrn *Takeya*. The Tôhoku Math. Journal 4 (1913), S. 89—93.
- [3] *Takahashi S.*, On the algebraic equations whose roots lie in the unit circle. The Tôhoku Math. Journal 38 (1933), S. 262—264.
- [4] *Eneström G.*, Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer som vid en godtycklig tidpunkt före finnas inom en slutna pensionskassa. Öfversigt af Konigl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Bd. 50 (1893), S. 405—415.
- [5] *Schulz W.*, Bemerkungen zu einer Abhandlung von Herrn *Takahashi*. Jahresbericht d. D. M. V., Bd. 45 (1935), S. 172—180.

Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume.

Von

Danilo Blanuša, Zagreb.

(Eingelangt am 25. Februar 1955.)

1. Einleitung.

Es ist bekannt, daß sowohl die hyperbolische Ebene [1] als auch der n -dimensionale hyperbolische Raum [2] im Hilbertschen Raum isometrisch eingebettet werden können. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit zeigte jedoch *J. Nash* [3], daß sich jede Riemannsche Mannigfaltigkeit schon in einem endlichdimensionalen euklidischen Raum einbetten läßt. Nun beruht *Nash's* Existenzbeweis auf einem kunstvoll aufgebauten System schrittweiser Annäherungen, das sich wohl kaum dazu eignet, eine solche Einbettung wirklich auszurechnen.

Wir wollen in dieser Arbeit zunächst eine isometrische Einbettung der hyperbolischen Ebene in einem R_6 (6-dimensionalen euklidischen Raum) formelmäßig angeben. Die Einbettung ist von der Differenzierbarkeitsklasse C^∞ , aber trotzdem nichtanalytisch. (Nach *Nash's* Resultaten ist die Existenz einer Einbettung der Klasse C^1 im R_4 sichergestellt.) Ferner soll eine Einbettung der Klasse C^∞ (ebenfalls nichtanalytisch) des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes im R_{6n-5} angegeben werden. (Auf Grund der Resultate von *Nash* muß es eine C^1 -Einbettung im R_{n+2} geben.)

In beiden Fällen gelang es bisher nicht, die Dimensionszahl des Einbettungsraumes herabzusetzen, ohne daß Selbstdurchdringungen auftreten.

2. Die hyperbolische Ebene im R_6 .

Es sei

$$\varphi_1(u) = e^{2\lceil(|u|+1)/2\rceil+5}, \quad \varphi_2(u) = e^{2\lceil|u|/2\rceil+6}. \quad (1a, b)$$

Dabei bedeuten die in eckigen Klammern gesetzten Ausdrücke die größte

ganze Zahl, die nicht größer ist als der eingeklammerte Ausdruck.

Ferner bedeute

$$A = \int_0^1 \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi, \quad (2)$$

$$\varphi_1(u) = (1/A \int_0^{u+1} \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi)^{1/2}, \quad (3a)$$

$$\varphi_2(u) = (1/A \int_0^u \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi)^{1/2}, \quad (3b)$$

$$f_1(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\psi_1(u)} \operatorname{sh} u, \quad f_2(u) = \frac{\varphi_2(u)}{\psi_2(u)} \operatorname{sh} u. \quad (4a, b)$$

Sind nun $x_1, \dots, x_6$ rechtwinklige Koordinaten im R_6 und u, v Parameter auf einer Fläche, so behaupten wir, daß die Gleichungen

$$x_1 = \int_0^u \sqrt{1 - [f'_1(\xi)]^2 - [f'_2(\xi)]^2} d\xi, \quad x_2 = v, \quad (5a, b)$$

$$x_3 = f_1(u) \cos(v\psi_1(u)), \quad x_4 = f_1(u) \sin(v\psi_1(u)), \quad (5c, d)$$

$$x_5 = f_2(u) \cos(v\psi_2(u)), \quad x_6 = f_2(u) \sin(v\psi_2(u)) \quad (5e, f)$$

eine C^∞ -Einbettung der hyperbolischen Ebene ohne Selbstdurchdringung im R_6 ergeben. Dabei erhält man die Metrik in der Form

$$ds^2 = \sum_{i=1}^6 dx_i^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2. \quad (6)$$

Die Gauss'sche Krümmung der Fläche wäre also gleich -1 . Es ist klar, daß sich durch eine Ähnlichkeitstransformation ein beliebiges negatives Krümmungsmaß erreichen ließe.

Um unsere Behauptung zu beweisen, brauchen wir einige Vorbereitungen.

Zur Abkürzung seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\chi(\xi) = \sin \pi \xi \cdot e^{-1/\sin^2 \pi \xi} = 1/e \sin \pi \xi \cdot e^{-\operatorname{ctg}^2 \pi \xi}, \quad (7)$$

wobei für ganzzahliges ξ $\chi = 0$ zu setzen ist.

$$\varrho_1(u) = 1/A \int_0^{u+1} \chi(\xi) d\xi, \quad \varrho_2(u) = 1/A \int_0^u \chi(\xi) d\xi, \quad (8a, b)$$

also in Hinblick auf (2) und (3a, b)

$$\varphi_1(u) = \sqrt{\varrho_1(u)}, \quad \varphi_2(u) = \sqrt{\varrho_2(u)}. \quad (9a, b)$$

Im Intervall $[0,1]$ ist $\chi \geq 0$, also wächst $\varrho_2(u)$ in diesem Intervall monoton, u. zw. von 0 bis 1, da $\varrho_2(u) = 0$ und $\varrho_2(1) = 1$ ist. Dasselbe gilt dann für die Funktion $\varphi_2(u)$.

$\chi(u)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\chi(\xi + 1) = -\chi(\xi). \quad (10)$$

Es wird daher

$$\begin{aligned} A \varrho_1(u) &= \int_0^{u+1} \chi(\xi) d\xi = \int_0^1 \chi(\xi) d\xi + \int_1^{u+1} \chi(\xi) d\xi = \int_0^1 \chi(\xi) d\xi + \int_0^u \chi(\eta+1) d\eta = \\ &= \int_0^1 \chi(\xi) d\xi - \int_0^u \chi(\eta) d\eta = A - \int_0^u \chi(\xi) d\xi = A - A \varrho_2(u) \end{aligned} \quad (11)$$

oder

$$\varrho_1(u) + \varrho_2(u) = 1, \quad (12)$$

das heißt

$$\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1. \quad (13)$$

Wegen (12) wird also $\varrho_1(u)$ im Intervall $[0,1]$ monoton fallen, und zwar von 1 bis 0.

Auf Grund der Definitionen (8a, b), (9a, b) gilt

$$\varrho_1(u) = \varrho_2(u + 1) \quad (14)$$

und

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u + 1), \quad (15)$$

also, wegen (12),

$$\begin{aligned} \varrho_1(u) &= \varrho_2(u + 1) = 1 - \varrho_1(u + 1) = 1 - \varrho_2(u + 2) = \\ &= 1 - [1 - \varrho_1(u + 2)] = \varrho_1(u + 2) \end{aligned} \quad (16)$$

und

$$\varphi_1(u) = \varphi_1(u + 2). \quad (16a)$$

Auf Grund von (12) folgt sofort

$$\varrho_2(u) = \varrho_2(u + 2) \quad (17)$$

und

$$\varphi_2(u) = \varphi_2(u + 2). \quad (18)$$

Wegen (14) muß $\varrho_2(u)$ im Intervall $[1,2]$ von 0 bis 1 monoton wachsen, weil $\varrho_1(u)$ dies im Intervall $[0,1]$ tut. Da ferner $\varrho_2(u)$ im Intervall $[0,1]$ von 0 bis 1 monoton wächst, muß wegen (14) dasselbe für $\varrho_1(u)$ im Intervall $[-1,0]$ und wegen (16) auch im Intervall $[1,2]$ gelten. Es gilt also im Intervall $[0,2]$ und daher wegen (16), (17) überall

$$0 \leq \varrho_1(u) \leq 1, \quad 0 \leq \varrho_2(u) \leq 1. \quad (18a, b)$$

Die Funktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ sind folglich überall reell, und es gilt, wenn die Quadratwurzel in (9a, b) stets positiv genommen wird,

$$0 \leq \varphi_1(u) \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_2(u) \leq 1. \quad (19a, b)$$

Man bestätigt leicht, daß für ganzzahliges n

$$\varrho_1(2n) = \varphi_1(2n) = 1, \quad \varrho_1(2n+1) = \varphi_1(2n+1) = 0, \quad (20a, b)$$

$$\varrho_2(2n) = \varphi_2(2n) = 0, \quad \varrho_2(2n+1) = \varphi_2(2n+1) = 1 \quad (21a, b)$$

gilt.

Da sich die Ableitungen der Funktion $\text{ctg } \pi u$ als Polynome in dieser Funktion ausdrücken lassen, ist es klar, daß sich eine beliebig hohe Ableitung von $\chi(u)$ als Produkt der Funktion $\exp(-\text{ctg}^2 \pi u)$ und einer ganzen rationalen Funktion von $\sin \pi u$, $\cos \pi u$ und $\text{ctg } \pi u$ darstellt. Läßt man darin u gegen irgendeine ganze Zahl streben, so ist leicht einzusehen, daß hiebei sowohl die Funktion $\chi(u)$ selbst, als auch deren sämtliche Ableitungen gegen Null streben. Daraus können wir schließen, daß an diesen Stellen die Funktion $\chi(u)$ stetig ist und deren sämtliche Ableitungen existieren und gleich Null sind. Selbstverständlich hat die Funktion auch an allen anderen Stellen Ableitungen beliebiger Ordnung.

Nach (8a, b) und (10) wird

$$\varrho_1^{(n)}(u) = \frac{1}{A} \chi^{(n-1)}(u+1) = -\frac{1}{A} \chi^{(n-1)}(u) \quad (22)$$

und

$$\varrho_2^{(n)} = \frac{1}{A} \chi^{(n-1)}(u). \quad (23)$$

Auf Grund der Eigenschaften der Funktion $\chi(u)$ haben also auch die Funktionen $\varrho_1(u)$ und $\varrho_2(u)$ überall Ableitungen beliebiger Ordnung. Für ganzzahliges u sind sämtliche Ableitungen gleich Null, während $\varrho_1(u)$ und $\varrho_2(u)$ an diesen Stellen die in (20a, b) und (21a, b) angegebenen Werte annehmen.

Auf Grund von (9a, b) schließt man ohne weiteres, daß an allen Stellen, wo $\varrho_1(u) > 0$ bzw. $\varrho_2(u) > 0$ ist, auch $\varphi_1(u)$ bzw. $\varphi_2(u)$ Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt.

Um dies auch an den Stellen, wo φ_1 bzw. φ_2 verschwinden, sicherzustellen, beachten wir zunächst, daß z. B. die n -te Ableitung von φ_2 eine Summe der Form

$$\varphi_2^{(n)} = (\varrho_2^{1/2})^{(n)} = \Sigma a_r \varrho_2^{1/2 - r_0} (\varrho_2')^{r_1} (\varrho_2'')^{r_2} \dots (\varrho_2^{(n)})^{r_n} \quad (24)$$

ist. Dabei sind die a_r gewisse numerische Koeffizienten, r_0 ist eine positive

ganze Zahl und $r_1, r_2, \dots, r_n$ sind gewisse nichtnegative ganze Zahlen. Es ist leicht zu sehen, daß für alle Glieder dieser Summe

$$1/2 - r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1/2 \quad (25)$$

gilt. Für $n = 0$ ist das trivial, da dann $r_0 = r_1 = \dots = r_n = 0$ ist. Allgemein folgt es durch vollständige Induktion, da beim Differenzieren der Exponent eines Faktors eines Summengliedes um eine Einheit erniedrigt wird, dafür aber das Glied mit der Ableitung des betreffenden Faktors multipliziert wird. Die Summe der Exponenten ändert sich also nicht, was Gleichung (25) zur Folge hat. Nun erinnern wir uns, daß sich jede Ableitung von ϱ_2 als Produkt aus der in (7) vorkommenden Exponentialfunktion und einer ganzen rationalen Funktion von $\sin \pi u$, $\cos \pi u$ und $\operatorname{ctg} \pi u$ darstellt. Bezeichnen wir eine solche Funktion mit $R(u)$, so wird also ein solches Summenglied $S(u)$ die Form

$$S(u) = R(u) e^{-(r_1 + \dots + r_n) \operatorname{ctg}^2 \pi u} \varrho_2^{1/2 - r_0} \quad (26)$$

haben. Es sei nun m eine ganze Zahl. Unter Anwendung der l'Hospital'schen Regel berechnen wir zunächst den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{\sin^3 \pi u \varrho_2'(u)}{2\pi \varrho_2(u)} &= \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{\sin^3 \pi u \chi(u)}{2A\pi \varrho_2(u)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{3\pi \sin^2 \pi u \cos \pi u \chi(u) + \sin^3 \pi u \chi'(u)}{2\pi \chi(u)} = 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Man kann daher unter Benützung von (27) und (25) schreiben:

$$\lim_{u \rightarrow 2m} S(u) = \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi)^{r_0 - 1/2} \sin^{1/2 - 3r_0} \pi u R(u). \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\cdot e^{-(r_1 + \dots + r_n) \operatorname{ctg}^2 \pi u} [\varrho_2'(u)]^{1/2 - r_0} \left(\frac{2\pi \varrho_2(u)}{\sin^3 \pi u \varrho_2'(u)} \right)^{1/2 - r_0} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi e)^{r_0 - 1/2} R(u) \sin^{1/2 - 3r_0} \pi u e^{-(r_1 + \dots + r_n) \operatorname{ctg}^2 \pi u} \cdot \\ &\cdot \sin^{1/2 - r_0} \pi u e^{-(1/2 - r_0) \operatorname{ctg}^2 \pi u} = \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi e)^{r_0 - 1/2} R(u) \sin^{2 - 4r_0} \pi u \cdot e^{-1/2 \operatorname{ctg}^2 \pi u} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach (24) $\varphi_2^{(n)}(u) \rightarrow 0$ für $u \rightarrow 2m$. Da $\varphi_2(u)$ für $u = 2m$ stetig ist, folgt weiter, daß in diesen Punkten sämtliche Ableitungen existieren und gleich Null sind.

Auf Grund von (15) folgt sofort dasselbe für $\varphi_1(u)$ in den Punkten $u = 2m + 1$.

Schließlich sieht man unschwer, daß auch die nach (4a, b) definierten Funktionen $f_1(u)$ und $f_2(u)$ überall Ableitungen beliebiger Ordnung

besitzen. Die in den Nennern vorkommenden Funktionen $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ sind nach (1a, b) Treppenfunktionen, und man überzeugt sich leicht, daß $\varphi_1(u)$ für ungerades u und $\varphi_2(u)$ für gerades u Sprungstellen hat, also gerade dort, wo die im Zähler stehenden Funktionen samt ihren sämtlichen Ableitungen verschwinden. Man überlegt sich weiter, daß dann die Ableitungen von f_1 und f_2 gegen Null streben, wenn man sich von rechts oder von links diesen Punkten nähert; daher existieren sämtliche Ableitungen in diesen Punkten und sind gleich Null.

Wir wollen nun zeigen, daß die durch (5a) definierte Funktion $x_1(u)$ reell ist. Dazu brauchen wir eine (grobe) Abschätzung für $|\varphi'_1(u)|$ und $|\varphi'_2(u)|$.

Da $\chi(\xi)$ nach (7) eine ungerade Funktion ist, ist nach (8b) und (9b) $\varphi_2(u)$ eine gerade Funktion, so daß wegen (18) folgt:

$$\varphi_2(u) = \varphi_2(-u) = \varphi_2(2-u), \quad (29)$$

also

$$\varphi'_2(u) = -\varphi'_2(2-u). \quad (30)$$

Wir können uns daher auf das Intervall $[0, 1]$ beschränken und wegen (15) auf die Funktion $\varphi_2(u)$. Nun ist in diesem Intervall

$$|\varphi'_2(u)| = \varphi'_2(u) = \frac{\varrho'_2(u)}{2\sqrt{\varrho_2(u)}} = \frac{\chi(u)}{2A\sqrt{\varrho_2(u)}}. \quad (31)$$

Im Intervall $[1/2, 1]$ fällt der Zähler monoton gegen Null, während der Nenner monoton gegen $2A$ wächst. Das Maximum von $\varphi'_2(u)$ muß also in $[0, 1/2]$ liegen. In diesem Intervall gilt nun

$$u \leq \sin \pi u \leq \pi u, \quad (32)$$

also

$$\varphi'_2(u) = \frac{\sin \pi u \exp(-1/\sin^2 \pi u)}{2\sqrt{A \int_0^u \sin \pi \xi \exp(-1/\sin^2 \pi \xi) d\xi}} \leq \frac{\pi u \exp(-1/\sin^2 \pi u)}{2\sqrt{A \int_0^u \xi \exp(-1/\sin^2 \pi \xi) d\xi}}. \quad (33)$$

Weiter wird für $0 < \lambda < 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^u \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi &> \int_{\lambda u}^u \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi > \int_{\lambda u}^u \lambda u e^{-1/\sin^2 \pi \lambda u} d\xi = \\ &= u^2 \lambda (1 - \lambda) e^{-1/\sin^2 \pi \lambda u}. \end{aligned} \quad (34)$$

Es folgt mit (33)

$$\begin{aligned} \varphi_2'(u) &< \frac{\pi \exp(-1/\sin^2 \pi u)}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)} \exp[-1/(2\sin^2 \lambda \pi u)]} = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 \pi u} + \frac{1}{2\sin^2 \pi \lambda u}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Da nun für $0 < u < 1/2$ die Sehne zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(u, \sin \pi u)$ unter der Sinuslinie $\sin \pi x$ liegt, so gilt

$$\sin \pi x > \frac{\sin \pi u}{u} \cdot x \quad (0 < x < u) \quad (36)$$

oder für $x = \lambda u$

$$\frac{\sin \pi u}{\sin \pi \lambda u} < \frac{1}{\lambda}. \quad (37)$$

Für $\frac{1}{\lambda} < \sqrt{2}$ wird also sicher

$$\sin \pi u < \sqrt{2} \sin \pi \lambda u, \quad (37a)$$

also

$$-\frac{1}{\sin^2 \pi u} + \frac{1}{2 \sin^2 \pi \lambda u} < 0, \quad (38)$$

d. h.

$$\exp\left(-\frac{1}{\sin^2 \pi u} + \frac{1}{2\sin^2 \pi \lambda u}\right) < 1. \quad (39)$$

Wir wählen insbesondere

$$\lambda = \frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (40)$$

und erhalten aus (35) und (39)

$$\varphi'(u) < \frac{\pi}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)}} = \frac{5\pi}{4\sqrt{A}}. \quad (41)$$

Um die Konstante A abzuschätzen, schreiben wir:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sin \pi \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi > \int_{1/4}^{3/4} \sin \pi \xi e^{-1/\sin^2 \pi \xi} d\xi > \\ &> \int_{1/4}^{3/4} \sin \frac{\pi}{4} e^{-1/\sin^2 \frac{\pi}{4}} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Hiemit wird schließlich

$$|\varphi_2'(u)| < \frac{5\sqrt[4]{8}e}{4} < 18, \quad (43)$$

und ebenso gilt

$$|\varphi_1'(u)| < 18 \quad (44)$$

für beliebiges u .

Nun lassen sich die Ableitungen f_1' und f_2' abschätzen. Es ist

$$f_1' = \frac{1}{\psi_1} (\varphi_1' \operatorname{ch} u + \varphi_1 \operatorname{sh} u) \quad (45)$$

(wobei ψ_1 als Treppenfunktion wie eine Konstante zu behandeln ist), also nach (19a) und (44)

$$|f_1'| \leq \frac{1}{\psi_1} (|\varphi_1'| e^{|u|} + |\varphi_1| e^{|u|}) < \frac{1}{\psi_1} 19 e^{|u|}. \quad (46)$$

Ebenso folgt wegen (19b) und (43)

$$|f_2'| < \frac{1}{\psi_2} 19 e^{|u|}. \quad (47)$$

Weiter überlegt man sich leicht, daß

$$2\left[\frac{|u|+1}{2}\right] + 1 \geq |u| \quad (48)$$

und

$$2\left[\frac{|u|}{2}\right] + 2 \geq |u|$$

ist. Daraus folgt wegen (1a, b)

$$\psi_1(u) \geq e^{|u|+4}, \quad \psi_2(u) \geq e^{|u|+4}, \quad (49a, b)$$

also sicher

$$|f_1'| < \frac{19}{e^4} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |f_2'| < \frac{19}{e^4} < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (50a, b)$$

(Die Exponenten in (1a, b) könnten natürlich verringert werden, ohne daß dieses Resultat zerstört wird, nicht aber bei einer später benützten Abschätzung.)

Es folgt jetzt sofort

$$1 - f_1'^2 - f_2'^2 > 0, \quad (51)$$

d. h. die Funktion $x_1(u)$ ist reell.

Auf Grund dieser Resultate sieht man, daß durch (5a—f) eine reelle C^∞ -Einbettung gegeben ist. Durch eine einfache Rechnung (bei der ψ_1

und ψ_2 als Konstante zu behandeln sind und von der Beziehung (13) Gebrauch zu machen ist) überzeugt man sich, daß die Metrik der Fläche in der Tat die Form (6) hat.

Daß die Fläche keine Selbstdurchdringung hat, erkennt man folgendermaßen:

Gäbe es eine Selbstdurchdringung, so müßten zwei Wertepaare der Parameter $u^{(1)}, v^{(1)}$ und $u^{(2)}, v^{(2)}$ dieselben Wertesextupel $(x_1^{(1)}, \dots, x_6^{(1)}) \equiv (x_1^{(2)}, \dots, x_6^{(2)})$ ergeben. Nun folgt aus $x_2^{(1)} = x_2^{(2)}$ wegen (5b) $v^{(1)} = v^{(2)}$. Da weiter wegen (51) x_1 eine monoton wachsende Funktion ist, folgt aus $x_1^{(1)} = x_1^{(2)}$ ebenso $u^{(1)} = u^{(2)}$. Die zwei Wertepaare u, v wären also nicht verschieden. Hiemit ist alles bewiesen.

3. Der n -dimensionale hyperbolische Raum im R_{6n-5} .

Es seien φ_1 und φ_2 wieder die nach (2), (3a, b) definierten Funktionen. Ebenso benützen wir die Treppenfunktionen ψ_1 und ψ_2 nach (1a, b). Ferner sei für $u > 0$

$$F_1(u) = \frac{\varphi_1(1/u)}{\psi_1(1/u)} \sqrt{\frac{1}{u^2} - e^{-2u}}, \quad F_2(u) = \frac{\varphi_2(1/u)}{\psi_2(1/u)} \sqrt{\frac{1}{u^2} - e^{-2u}}. \quad (52a, b)$$

Weiter seien $x_0, x_{r1}, \dots, x_{r6}$ ($r = 1, \dots, n-1$) rechtwinklige Koordinaten in einem R_{6n-5} . Als Parameter benützen wir u, v_r ($r = 1, \dots, n-1$), wobei u alle positiven und die v_r alle reellen Werte annehmen können.

Wir behaupten, daß dann die Gleichungen

$$x_0 = \int_1^u \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - F_1'^2 - F_2'^2 - e^{-2\xi}} d\xi, \quad (53a)$$

$$x_{r1} = \frac{e^{-u}}{\sqrt{n-1}} \cos(\sqrt{n-1} v_r), \quad x_{r2} = \frac{e^{-u}}{\sqrt{n-1}} \sin(\sqrt{n-1} v_r), \quad (53b, c)$$

$$x_{r3} = \frac{F_1(u)}{\sqrt{n-1}} \cos(\sqrt{n-1} v_r \psi_1(1/u)), \quad (53d)$$

$$x_{r4} = \frac{F_1(u)}{\sqrt{n-1}} \sin(\sqrt{n-1} v_r \psi_1(1/u)), \quad (53e)$$

$$x_{r5} = \frac{F_2(u)}{\sqrt{n-1}} \cos(\sqrt{n-1} v_r \psi_2(1/u)), \quad (53f)$$

$$x_{r6} = \frac{F_2(u)}{\sqrt{n-1}} \sin(\sqrt{n-1} v_r \psi_2(1/u)) \quad (53g)$$

eine C^∞ -Einbettung ohne Selbstdurchdringung des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes in einem R_{6n-5} darstellen. Dabei erhält man die hyperbolische Metrik in der Form

$$ds^2 = dx_0^2 + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^6 dx_{rs}^2 = \frac{1}{u^2} (du^2 + \sum_{r=1}^{n-1} dv_r^2). \quad (54)$$

Auf Grund der Eigenschaften der Funktionen $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ sieht man auch hier leicht ein, daß die Einbettung von der Klasse C^∞ ist.

Die Funktionen $F_1(u)$ und $F_2(u)$ sind offensichtlich reell, da für $u > 0$

$$\frac{1}{u^2} - e^{-2u} > 0 \quad (55)$$

ist. Es ist nun zu zeigen, daß die Funktion $x_0(u)$ für jedes $u > 0$ reell ist, d. h. daß der Ausdruck unter der Wurzel in (53a) für $\xi > 0$ positiv ist.

Betrachten wir diesen Ausdruck zunächst für die Werte $\xi > 1$. Es ist

$$\begin{aligned} F'_1(\xi) &= \frac{1}{\psi_1(\frac{1}{\xi})} \left\{ \varphi'_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} + \varphi_1(1/\xi)} - \frac{\frac{2}{\xi^3} + 2e^{-2\xi}}{2 \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\xi_1 \psi_1(\frac{1}{\xi}) \sqrt{1 - \xi^2 e^{-2\xi}}} \left\{ -\varphi'_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \left(\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}\right) - \varphi_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \left(\frac{1}{\xi} - \xi^2 e^{-2\xi}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Nun ist weiter

$$0 < \frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} < 1 \quad (\xi > 1). \quad (57)$$

Das Minimum der Funktion $1 - \xi^3 e^{-2\xi}$ (für $\xi = 3/2$) ist positiv, also gilt

$$0 < \frac{1}{\xi} - \xi^2 e^{-2\xi} < 1 \quad (\xi > 1). \quad (58)$$

Schließlich ist das Minimum von $1 - \xi^2 e^{-2\xi}$ (für $\xi = 1$) gleich $1 - e^{-2}$, also

$$1 - \xi^2 e^{-2\xi} > 1 - e^{-2} > \frac{6}{7} > \frac{6^2}{7^2} \quad (\xi > 1). \quad (59)$$

Hiemit wird

$$|F_1'(\xi)| < \frac{7}{6\xi \psi_1(\frac{1}{\xi})} \left\{ \left| \varphi_1'(\frac{1}{\xi}) \right| + \varphi_1(\frac{1}{\xi}) \right\} \quad (\xi > 1) \quad (60)$$

oder wegen (19a) und (44)

$$|F_1'(\xi)| < \frac{7 \cdot 19}{6\xi \psi_1(\frac{1}{\xi})} = \frac{133}{6\xi \psi_1(\frac{1}{\xi})} \quad (\xi > 1). \quad (61)$$

Weiter gilt für $\xi > 1$

$$\psi_1(1/\xi) = e^5, \quad \psi_2(1/\xi) = e^6. \quad (62a, b)$$

Es wird also nach (61) und auf Grund einer ganz analogen Rechnung für $F_2'(\xi)$

$$|F_1'(\xi)| < \frac{133}{6\xi e^5}, \quad |F_2'(\xi)| < \frac{133}{6\xi e^6}. \quad (63a, b)$$

Aus (59) und (63a, b) folgt

$$\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} > \frac{6}{7\xi^2} > \left(\frac{133}{6\xi e^5}\right)^2 + \left(\frac{133}{6\xi e^6}\right)^2 > |F_1'(\xi)|^2 + |F_2'(\xi)|^2. \quad (64)$$

Die Wurzel in (53a) ist also in der Tat reell für $\xi > 1$.

Es sei nun $\xi \leq 1$. Wir schreiben (56) in der Form

$$F_1'(\xi) = \frac{1}{\xi^4 \psi_1(\frac{1}{\xi}) \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}}} \left\{ -\varphi_1'(\frac{1}{\xi}) (1 - \xi^2 e^{-2\xi}) - \varphi_1(\frac{1}{\xi}) (\xi - \xi^4 e^{-2\xi}) \right\}. \quad (65)$$

Nun ist

$$1 - \xi^2 e^{-2\xi} < 1, \quad \xi - \xi^4 e^{-2\xi} = \xi(1 - \xi^3 e^{-2\xi}) < 1 \quad (\xi \leq 1), \quad (66a, b)$$

und es gilt ferner

$$\frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi} > \frac{1}{2\xi^2} \quad (\xi \leq 1). \quad (67)$$

In der Tat ist

$$1 - 2\xi^2 e^{-2\xi} > 0, \quad (68)$$

da diese Funktion ihr positives Minimum für $\xi = 1$ annimmt. Hieraus folgt leicht (67).

Mit Hilfe von (66a, b) und (67) erhält man

$$|F_1'(\xi)| < \frac{\sqrt{2}}{\xi^3 \varphi_1(\frac{1}{\xi})} \left\{ |\varphi_1'(\frac{1}{\xi})| + \varphi_1(\frac{1}{\xi}) \right\} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot 19}{\xi^3 \varphi_1(\frac{1}{\xi})}, \quad (69)$$

bzw. durch eine analoge Rechnung

$$|F_2'(\xi)| < \frac{\sqrt{2} \cdot 19}{\xi^3 \psi_2(\frac{1}{\xi})}. \quad (70)$$

In Hinblick auf (49a, b) ist nun

$$\varphi_1(1/\xi) \geq e^{\frac{1}{\xi} + 4}, \quad \psi_2(1/\xi) \geq e^{\frac{1}{\xi} + 4}. \quad (71a, b)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{\xi}} - \frac{1}{\xi^2} &= -\frac{1}{\xi^2} + 1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2! \xi^2} + \frac{1}{3! \xi^3} + \frac{1}{4! \xi^4} + \dots = \\ &= \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2} \right) + 1 + \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi \sqrt{6}} \right)^2 + \frac{1}{4! \xi^4} + \dots > 0, \end{aligned} \quad (72)$$

also

$$e^{\frac{1}{\xi}} > \frac{1}{\xi^2}. \quad (73)$$

Daher wird

$$|F_1'(\xi)| < \frac{\sqrt{2} \cdot 19}{\xi e^4}, \quad |F_2'(\xi)| < \frac{\sqrt{2} \cdot 19}{\xi e^4}. \quad (74a, b)$$

Es wird also schließlich wegen (67) und (74a, b)

$$|F_1'(\xi)|^2 + |F_2'(\xi)|^2 < 2 \frac{19^2}{\xi^2 e^8} < \frac{1}{2\xi^2} < \frac{1}{\xi^2} - e^{-2\xi}, \quad (75)$$

so daß auch für $\xi \leq 1$ die Wurzel in (53a) reell ist.

Wir zeigen nun, daß die Mannigfaltigkeit keine Selbstdurchdringung hat. Es müßte sonst zwei verschiedenen Punkten $(u^{(1)}, v_r^{(1)})$ und $(u^{(2)}, v_r^{(2)})$ der Mannigfaltigkeit derselbe Punkt $(x_0^{(1)}, x_{r1}^{(1)}, \dots, x_{r6}^{(1)}) \equiv (x_0^{(2)}, x_{r1}^{(2)}, \dots, x_{r6}^{(2)})$ des Einbettungsraumes entsprechen. Nun sieht man sofort, daß nach (53a) x_0 eine monoton wachsende Funktion von u ist. Aus $x_0^{(1)} = x_0^{(2)}$ folgt also $u^{(1)} = u^{(2)}$. Beachten wir weiter, daß F_1 und F_2 niemals gleichzeitig verschwinden. Es sei also etwa $F_1(u) \neq 0$. Dann folgt aus $x_{r3}^{(1)} = x_{r3}^{(2)}$ und $x_{r4}^{(1)} = x_{r4}^{(2)}$ nach (53d), (53e)

$$\sqrt{n-1} v_r^{(1)} \psi_1(1/u) = \sqrt{n-1} v_r^{(2)} \psi_1(1/u) + 2k_1\pi \quad (76)$$

und aus $x_{r1}^{(1)} = x_{r1}^{(2)}$ und $x_{r2}^{(1)} = x_{r2}^{(2)}$ nach (53b), (53c)

$$\sqrt{n-1} v_r^{(1)} = \sqrt{n-1} v_r^{(2)} + 2k_2\pi. \quad (77)$$

Nun ist $\psi_1(1/u)$ eine Potenz von e mit ganzem positiven Exponenten, etwa e^s . Die Gleichungen (76) und (77) ergeben dann

$$k_1 = e^s k_2. \quad (78)$$

Das ist aber nur für $k_1 = k_2 = 0$ möglich, da sonst e^s rational, also e algebraisch sein müßte. Es gilt also $v_r^{(1)} = v_r^{(2)}$ ($r = 1, \dots, n-1$), d. h. die beiden Punkte der Mannigfaltigkeit sind identisch. Ist $F_1(u) = 0$, so ist $F_2(u) \neq 0$, und man zieht dieselben Schlußfolgerungen auf Grund der Gleichungen (53b, c) und (53f, g).

Schließlich zeigt eine einfache Rechnung, daß (54) richtig ist. Dabei sind die Treppenfunktionen ψ_1 und ψ_2 wieder als Konstante zu behandeln, und es ist die Beziehung (13) zu benutzen.

Der Sonderfall $n = 2$ ergibt eine Einbettung der hyperbolischen Ebene im R_7 . Wir gaben jedoch oben an, wie man für diesen Fall eine Einbettung bereits im R_6 konstruieren kann.

Literatur.

- [1] *L. Bieberbach*, Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. *Comment. math. helv.* **4** (1932), S. 248—255.
- [2] *D. Blanuşă*, Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n -dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum. *Monatsh. f. Math.*, **57** (1953), S. 102—108.
- [3] *J. Nash*, C^1 Isometric Imbeddings. *Annals of Math.* **60** (1954), S. 383—396.

Konkave Eikörperfunktionale.

Herrn W. Süß, Freiburg i. Br., zum 60. Geburtstag¹.

Von

H. Hadwiger, Bern.

(Eingelangt am 16. März 1955.)

Innerhalb der axiomatischen Theorie der Eikörperfunktionale hat man von willkürlich, aber sinnvoll gewählten, charakteristischen Eigenschaften von Eikörperfunktionen auszugehen und zu versuchen, lediglich gestützt auf diese Postulate, weitere Aussagen herzuleiten, welche im Rahmen der Theorie von Interesse sind.

Viele Sätze, welche in der klassischen Theorie der konvexen Körper für besonders wichtige konkret gegebene Maßzahlen nachgewiesen worden sind, gelten allgemeiner für umfangreiche Klassen solcher Funktionale, die durch gewisse kennzeichnende Eigenschaften implizite definiert sind.

So kann man beispielsweise fragen, welche allgemein faßbaren Eigenschaften eines Eikörperfunktionalen dafür garantieren, daß die Kugel bei dieser oder jenen Nebenbedingungen extremal ist.

Falls Aussagen solcher Art gelingen, lösen sie Extremalprobleme für ganze Klassen von Maßzahlen.

In dieser Studie untersuchen wir eine solche besondere Klasse von Eikörperfunktionen; die charakteristischen Eigenschaften sind bei zahlreichen Maßzahlen realisiert.

I.

Es bezeichne $\mathfrak{M}$ die halbbilineare Mannigfaltigkeit derjenigen reellen Funktionen φ , die über der Klasse der eigentlichen und uneigentlichen konvexen Körpern A des k -dimensionalen euklidischen Raumes definiert sind und die Eigenschaften

¹ Die vorliegende Note stellt die Ausarbeitung eines Vortrages dar, den der Verfasser in dem vom 6. bis 8. 3. 1955 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach anlässlich des 60. Geburtstages von Prof. Dr. W. Süß durchgeführten Kolloquium gehalten hat.

$$\varphi(A) = \varphi(B) \quad [A \simeq B] \quad (1)$$

$$\varphi(A) \geq \varphi(B) \quad [A \supset B] \quad (2)$$

$$\varphi(A_n) \rightarrow \varphi(A) \quad [A_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty] \quad (3)$$

$$\varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A) \quad (4)$$

$$\varphi(A \times B) \geq \varphi(A) + \varphi(B) \quad [A, B \neq 0] \quad (5)$$

aufweisen. Erklärend sei beigefügt, daß $A \simeq B$ die Translationsgleichheit von A und B ausdrückt, daß sich die Konvergenz $A_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty$ der Eikörper $A_n (n = 1, 2, \dots)$ gegen den Grenzeikörper A auf die in der Theorie der konvexen Körper übliche Metrik stützt, und daß λA den durch Dilatation mit $\lambda \geq 0$ aus A hervorgehenden Körper bezeichnet; endlich bedeute $A \times B$ die Minkowskische Summe (Linearkombination) der Eikörper A und B .

$\mathfrak{M}$ umfaßt also die *translationsinvarianten, monotonen, stetigen, linearen* und die (im Minkowskischen Sinne) *konkaven* Eikörperfunktionale.

Es ist aus formalen Gründen zweckmäßig, die leere Menge 0 auch zum Definitionsbereich von φ hinzuzufügen und $\varphi(0) = 0$ zu setzen. Aus (2) ergibt sich dann wegen $A \supset 0$ noch die Folgerung, daß

$$\varphi(A) \geq 0 \quad (6)$$

sein muß; φ ist demnach ein *definites* Eikörperfunktional. Für ein nicht-triviales, d. h. nicht identisch verschwindendes Funktional gilt, wie man sich leicht überlegt, $\varphi(A) > 0$, falls A eigentlich ist, d. h. innere Punkte enthält.

Zur Erklärung der gewählten Bezeichnungsweise und zur weiteren Verwendung sei noch angeführt, daß aus (4) und (5) gefolgert werden kann, daß

$$f(\lambda) = \varphi(A \times \lambda B) \quad (7)$$

eine konkave Funktion von λ ist. In der Tat ergibt sich mit Verwendung der bekannten kommutativen, assoziativen und (in Verbindung mit der Dilatation) distributiven Regeln für die Minkowskische lineare Kombination zunächst $2A \times (\nu + \mu) B = (A \times \nu B) \times (A \times \mu B)$ und hieraus $2f((\nu + \mu)/2) \geq f(\nu) + f(\mu)$.

Einfachste Funktionale, für welche die Eigenschaften (1) bis (5) trivial verifiziert werden können, sind beispielsweise die mit den folgenden Ansätzen (8) bis (11) angegeben. (8) $\varphi(A) = \beta_\tau(A)$, wo β_τ die Breite des Eikörpers in der Richtung τ bezeichnet. (9) $\varphi(A) = d(A) =$ Dicke von A . (10) $\varphi(A) = r(A) =$ Inkugelradius von A . (11) $\varphi(A) = \beta(A)$, wobei β die mittlere Breite bedeutet.

II.

Wir formulieren zunächst ein nützliches Kriterium, das für die Konkavität eines Funktionalen notwendig und hinreichend ist. Es sei φ ein translationsinvariantes, monotones und lineares Eikörperfunktional und es sei $\Phi(A) = [\varphi(A)]^p$ und $p > 0$. Dann gilt: Das Funktional φ ist dann und nur dann (im Minkowskischen Sinn) konkav, wenn sich für $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ die Aussage

$$\Phi(\alpha A \times \beta B) \geq 1 \quad [\Phi(A) = \Phi(B) = 1] \quad (12)$$

bestätigen läßt.

Wir haben zu zeigen, daß (12) mit (5) gleichwertig ist, vorausgesetzt, daß φ die Eigenschaften (1), (2) und (4) aufweist. In der Tat: a. Aus (5) folgt (12): Mit $\Phi(A) = \Phi(B) = 1$ ist auch $\varphi(A) = \varphi(B) = 1$, und mit (5) folgt $\varphi(\alpha A \times \beta B) \geq \varphi(\alpha A) + \varphi(\beta B)$, so daß sich mit (4) $\varphi(\alpha A \times \beta B) \geq 1$ oder auch (12) ergibt.

b. Aus (12) folgt (5): Wir nehmen zunächst an, daß $\varphi(A) = 1/a > 0$ und $\varphi(B) = 1/b > 0$ ist. Dann wird mit Verwendung von (4) $\Phi(\alpha A) = \Phi(bB) = 1$, und nach (12) resultiert also $\varphi(\alpha A \times \beta bB) \geq 1$. Setzt man hier speziell $\alpha = b/(a+b)$ und $\beta = a/(a+b)$, so ergibt sich wieder mit (4) $\varphi(A \times B) \geq (a+b)/ab = \varphi(A) + \varphi(B)$ und damit (5). Es sei jetzt etwa $\varphi(B) = 0$; in diesem Fall ergibt sich aber $\varphi(A \times B) \geq \varphi(A)$, also mit Rücksicht auf (1) und (2) wieder (5).

III.

Wir leiten nun einen allgemeinen Integralsatz her, wonach sich durch gewisse Potenzintegrale mit konkaven Funktionen der Schnittbereiche aus Eikörpern bei parallel variierten Schnitträumen wieder konkave Funktionale gewinnen lassen. Es zeigt sich, daß der Brunn-Minkowskische Hauptsatz ein sehr spezieller, aber wichtiger Sonderfall des allgemeinen, der translationsinvarianten Integralgeometrie zugehörenden Gesetzes ist.

Das hier verwendete Beweisverfahren ist identisch mit der von *H. Kneser* und *W. Süß* bei ihrem bekannten kurzen Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes herangezogenen eleganten Schlußweise².

² *H. Kneser* — *W. Süß*, Die Volumina in linearen Scharen konvexer Körper. Mat. Tidsskr. B, 19—25, 1932.

Der Beweis ist wiedergegeben bei

T. Bonnesen — *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, insb. S. 88—90.

Die Formulierung unseres Satzes vorbereitend, geben wir einige Erklärungen.

Es bedeute $\mathfrak{M}^i$ die im Abschnitt I eingeführte halblinare Mannigfaltigkeit der konkaven Funktionale, die sich aber, wie der Index anzeigt, auf einen i -dimensionalen Unterraum E^i des unseren Betrachtungen zugrunde gelegten k -dimensionalen Raumes E^k beziehen soll. Es sei also $1 \leq i \leq k-1$. Wir denken uns jetzt E^i im E^k parallel variierbar und es bezeichne dE^i die Translationsdichte von E^i im Sinne der Integralgeometrie.

Der Integralsatz lautet jetzt wie folgt: *Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}^i$ ein nichttriviales konkaves Eikörperfunktional des E^i und $p > 0$. Dann ist durch*

$$\psi(A) = \left\{ \int [\varphi(A \cap E^i)]^p dE^i \right\}^{\frac{1}{p+k-i}} \quad (13)$$

ein konkaves Eikörperfunktional $\psi \in \mathfrak{M}^k$ des E^k gegeben.

Die Integration erstreckt sich effektiv nur über die E^i , welche den Eikörper A treffen.

Der einfache Nachweis, daß sich die Eigenschaften (1) bis (4) des Funktionals φ im E^i auf ψ im E^k übertragen, kann hier übergangen werden. Wir zeigen, daß ψ die wesentliche Eigenschaft (5) besitzt, also konkav ist.

Es sei zunächst $i = k-1$. Nach dem Kriterium (12) genügt es, das Hilfsfunktional (aa) $\Phi(A) = [\psi(A)]^{p+1}$ für zwei Eikörper A_ν ($\nu = 0, 1$) mit (ab) $\Phi(A_\nu) = 1$ zu betrachten, und zu zeigen, daß (ac) $\Phi(\alpha_0 A_0 \times \alpha_1 A_1) \geq 1$ ausfällt, wenn $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_0 + \alpha_1 = 1$ ist. Einen parallel variierbaren E^{k-1} fixieren wir durch eine Koordinate z auf einer durch den Ursprung Z des Raumes E^k orthogonal zu allen E^{k-1} gelegten z -Achse. Statt E^{k-1} schreiben wir E_z , und die Translationsdichte dE^{k-1} ist dann dz . Die Translationsinvarianz der in Betracht fallenden Funktionen erlaubt eine beliebige Verschiebung der beteiligten Körper. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß E_0 durch Z eine gemeinsame untere Stützebene der beiden Körper A_ν ist, so daß diese im Halbraum $z \geq 0$ liegen. Die obere Stützebene von A_ν sei E_{β_ν} . β_ν ist demnach die Breite von A_ν in der z -Richtung. Im Hinblick auf die Erklärung der Minkowskischen Addition ist dann E_0 untere und $E_{\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1}$ obere Stützebene von $\alpha_0 A_0 \times \alpha_1 A_1$. Die Voraussetzung (aa) nimmt nun die Form

$$\Phi(A_\nu) = \int_0^{\beta_\nu} [\varphi(A_\nu \cap E_z)]^p dz \quad (\text{ba})$$

an, und entsprechend ist

$$\Phi(\alpha_0 A_0 \times \alpha_1 A_1) = \int_0^{\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1} [\varphi((\alpha_0 A_0 \times \alpha_1 A_1) \cap E_z)]^p dz. \quad (\text{bb})$$

Nun führen wir durch den Ansatz

$$\int_0^{z_v(t)} [\varphi(A_v \cap E_z)]^p dz = t \quad (\text{ca})$$

eine im Intervall $0 < t < 1$ definierte, monoton von 0 bis β_v zunehmende und wegen der Stetigkeit und Definitheit des Integranden auch differenzierbare Funktion $z_v = z_v(t)$ ein. Offenbar gilt (cb) $[\varphi(A_v \cap E_{z_v})]^p z'_v = 1$. Setzt man in (bb) (cd) $z = z(t) = \alpha_0 z_0(t) + \alpha_1 z_1(t)$ und bedenkt noch, daß jedenfalls $(\alpha_0 A_0 \times \alpha_1 A_1) \cap E_z \supset (\alpha_0 A_0 \cap E_{\alpha_0 z_0}) \times (\alpha_1 A_1 \cap E_{\alpha_1 z_1})$ gilt, so gewinnt man mit passender Verwendung der Eigenschaften (1), (2), (4) und (5) von φ

$$\Phi(\alpha_0 A_0 \times \alpha_1 A_1) \geq \int_0^1 [\alpha_0 \varphi(A_0 \cap E_{z_0}) + \alpha_1 \varphi(A_1 \cap E_{z_1})]^p z' dt, \quad (\text{da})$$

und mit Anwendung der Jensenschen Ungleichung

$$\Phi(\alpha_0 A_0 \times \alpha_1 A_1) \geq \int_0^1 (\alpha_0 [\varphi(A_0 \cap E_{z_0})]^{-p} + \alpha_1 [\varphi(A_1 \cap E_{z_1})]^{-p})^{-1} z' dt, \quad (\text{db})$$

und endlich mit Rückblick auf (cb) und (cd) die gewünschte Ungleichung (ac).

Es ist nun der Fall $i < k-1$ zu erledigen. Wir treffen die induktive Annahme, daß unsere Behauptung $\varphi \varepsilon \mathfrak{M}^k$ bereits für alle $i > j$ erwiesen sei; nach dem soeben beendeten Hauptbeweis trifft dies für $j=k-2$ zu. Wir zeigen, daß unsere Behauptung auch für $i=j$ richtig ist. Es sei E^{j+1} ein beliebiger Raum, der einen E^j der in Betracht zu ziehenden parallelen Schar enthält. Denken wir uns zunächst E^{j+1} fest, und verschieben wir E^j nur innerhalb seines Trägersraumes, so läßt sich die relative Translationsdichte $d\bar{E}^j$ bilden. Es gilt dann die Dichterelation $dE^j = d\bar{E}^j dE^{j+1}$. Machen wir diesen Einsatz in (13) und lassen wir zunächst E^{j+1} fest und integrieren über den im E^{j+1} schiebbaren E^j , so stellt man im Hinblick auf den bereits bewiesenen Hauptteil fest, daß

$$\int [\varphi(A \cap E^j)]^p d\bar{E}^j = [\chi(A \cap E^{j+1})]^{p+1}$$

sein wird ($j+1$ tritt an die Stelle von k), wobei $\chi \varepsilon \mathfrak{M}^{j+1}$ gilt. Nun integriert man noch über den im E^k schiebbaren E^{j+1} , wobei sich

$$\psi(A) = \left\{ \int [\chi(A \cap E^{j+1})]^{p+1} dE^{j+1} \right\}^{\frac{1}{p+k-i}}$$

ergibt. Nach der induktiven Annahme folgt jetzt $\varphi \in \mathfrak{M}^k$. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

IV.

Ein besonders erwähnenswerter Spezialfall des Integralsatzes (13) ist mit $i = 1$ und $\varphi = s =$ Länge gegeben. Dieses Eikörperfunktional im E^1 oder Streckenfunktional besitzt offensichtlich die Eigenschaften (1) bis (5). Es ergibt sich, daß mit Ansatz

$$\psi_p(A) = \left[\int s^p dG \right]^{\frac{1}{p+k-1}} \quad (14)$$

besondere konkave Eikörperfunktionale im E^k dargestellt sind. Hier bezeichnet dG die Translationsdichte einer im E^k schiebbaren Geraden G , und s ist die Länge der von G aus A ausgeschnittenen Sehne. Es handelt sich also bei (14) um *translative Sehnenpotenzintegrale*.

Bedeutsam ist der noch speziellere Fall $p = 1$. Es ergibt sich, daß

$$\psi_1(A) = [V(A)]^{1/k} \quad (15)$$

ein konkaves Funktional ist, wo V das Volumen bezeichnet. Dies ist der *Brunn-Minkowskische Satz*.

V.

Wir erwähnen eine einfache Extremalaussage, welche sich im Zusammenhang mit translationsinvarianten konkaven Funktionalen formulieren läßt.

Wir nehmen an, daß für ein individuell gewähltes $\varphi \in \mathfrak{M}$ der wegen der Konkavität der Funktion (7) sicher existierende aber eventuell uneigentliche Grenzwert

$$\varphi_B(A) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi(A \times \lambda B) - \varphi(A)}{\lambda} \quad (16)$$

für alle Eikörper A eigentlich, d. h. endlich ausfällt. Das mit (16) eingeführte Funktional $\varphi_B(A)$ ist die B -Derivierte von φ . Direkt aus den Eigenschaften (4) und (5) folgt die Ungleichung

$$\varphi_B(A) \geq \varphi(B), \quad (17)$$

wobei das Gleichheitszeichen jedenfalls dann gilt, wenn A mit B homothetisch ist.

Die Anwendung auf den Sonderfall des Volumfunktional (15) ergibt die, sich auf die mit B als Eichkörper gebildete Relativoberfläche $F_B(A)$ beziehende *isoperimetrische Ungleichung*

$$F_B(A) \geq k[V(B)]^{\frac{1}{k}} [V(A)]^{1 - \frac{1}{k}}. \quad (18)$$

Wenn B die Einheitskugel ist, so wird (18) mit der klassischen isoperimetrischen Ungleichung identisch.

VI.

Eine besondere Bedeutung haben offenbar diejenigen Funktionale von $\mathfrak{M}$, die nicht nur translationsinvariant, sondern sogar *bewegungs-invariant* sind, die also an Stelle von (1) der stärkeren Forderung

$$\varphi(A) = \varphi(B) \quad [A \simeq B] \quad (1^0)$$

genügen. Durch $A \simeq B$ sei die Kongruenz von A und B ausgedrückt. Diese Funktionale bilden die echte Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$. Mit (9), (10) und (11) sind Beispiele bewegungsinvarianter Funktionale gegeben worden. Das wichtige Volumfunktional (15) gehört ebenfalls hierher.

Man kann auf mannigfaltige Weise aus einem $\varphi \in \mathfrak{M}$ ein $\psi \in \mathfrak{N}$ gewinnen. Wie man sich mühelos überlegt, führen die Ansätze

$$\psi(A) = \min_{\delta} \varphi(A^{\delta}) \quad (19)$$

und

$$\psi(A) = \int \varphi(A^{\delta}) d\delta \quad (20)$$

ein translationsinvariantes konkaves Funktional φ in ein bewegungs-invariantes konkaves Funktional ψ über. Hierbei bezeichnet δ eine Drehung um den Ursprung Z und $d\delta$ die Drehdichte im Sinne der Integralgeometrie. Die Existenz der rechten Seiten in (19) und (20) ist durch die Stetigkeit von φ sichergestellt.

Wir wollen unsere Studie mit der Herleitung einer Extremaleigenschaft der Kugel beschließen, die sich auf beliebige bewegungsvariante konkave Funktionale bezieht.

Es gilt folgende Aussage: Es sei $\psi \in \mathfrak{N}$ und $\beta \in \mathfrak{N}$ bezeichne die mittlere Breite. Dann besteht die Ungleichung

$$\psi(A) \leq \psi(K) \quad [\beta(A) = \beta(K)], \quad (21)$$

wobei K eine Kugel bedeutet.

Dies ist eine Extremalaussage im Rahmen der axiomatischen Theorie der Eikörperfunktionale, von der Art, wie sie einleitend angedeutet wurden. Der Satz lautet vollständig wie folgt: *Ein bewegungsinvariantes, monotones, stetiges, lineares und konkaves Funktional nimmt unter allen Eikörpern vorgegebener mittlerer Breite den größtmöglichen Wert für die Kugel an.*

Da beispielsweise nach dem Satz von *W. Fenchel*³ durch

$$\psi_i(A) = [W_i(A)]^{\frac{1}{k-i}}, \quad (22)$$

ein Funktional dieser Art dargestellt wird, wenn W_i das i -te Minkowskische Quermaßintegral bezeichnet, kann die Extremaleigenschaft der Kugel, unter allen Eikörpern vorgegebener mittlerer Breite das größtmögliche W_i ($0 \leq i < k-1$) aufzuweisen, als wichtiger Sonderfall unseres allgemeinen Satzes angesehen werden.

Der Nachweis der Ungleichung (21) ist einfach.

Wir betrachten Eikörper A^n , die sich aus A durch die Minkowskische Linearkombination $A^n = \lambda_1 A_1 \times \dots \times \lambda_n A_n$ gewinnen lassen, wo $\lambda_\nu \geq 0$ ($\nu=1, \dots, n$) und $\sum_1^n \lambda_\nu = 1$ ist; ferner sei $A_\nu \simeq A$ ($\nu=1, \dots, n$).

Mit den Eigenschaften (4), (5) und (1⁰) schließt man auf (aa) $\psi(A) \leq \psi(A^n)$, während für die mittlere Breite (ab) $\beta(A) = \beta(A^n)$ gilt. Nun läßt sich nach einem auf die Minkowskische Linearkombination bezüglichen Kugelungstheorem⁴ eine Eikörperfolge A^n ($n=1, 2, \dots$) so bilden, daß $A^n \rightarrow K$ ($n \rightarrow \infty$) gilt. Offenbar muß wegen (ab) und der Stetigkeit von β (ba) $\beta(A) = \beta(K)$ sein. Mit der Stetigkeitseigenschaft (3) folgt aus (aa) schließlich (bb) $\psi(A) \leq \psi(K)$. Damit ist der Beweis beendet.

³ *W. Fenchel*, Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes. C. R. Acad. Sci. Paris **203**, 647–650, 1936.

⁴ *H. Hadwiger*, Additive Funktionale k -dimensionaler Eikörper. I. Arch. der Math. **3**, 470–478, 1952.

Buchbesprechungen.

Gesammelte Mathematische Schriften. Von *C. Carathéodory*. Band II. XI, 457 S. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung. 1955.

Der zweite Band (vgl. die Besprechung: Monatshefte für Mathematik, Band 58, S. 306) bringt zunächst den Abschluß der Abhandlungen zur Variationsrechnung (Geometrische Methoden und Historisches), dann die Arbeiten zur Thermodynamik, geometrischen Optik und Mechanik. Auch die als selbständige Druckschrift erschienene „Elementare Theorie des Spiegelteleskops von *B. Schmidt*“ ist dankenswerter Weise in dem Band aufgenommen. Folgende ungedruckte, teils fragmentarische Artikel werden besonderes Interesse finden: Der *B. Schmidt*'sche Projektionsapparat (nach einem nachgelassenen fragmentarischen Manuskript von *F. Löbell* bearbeitet, behandelt den Schmidt-Spiegel für Objekte endlicher Entfernung), Berechnung der Diffraktionskurven aus dem Eikonal (nachgelassene Fragmente, bearbeitet und mit einleitenden Bemerkungen versehen durch *M. Herzberger*) und eine zum 70. Geburtstag von *G. Faber* als Manuskript überreichte Arbeit: Integration des Zweikörperproblems, die gegenüber den beiden unveröffentlichten Arbeiten über denselben Gegenstand einige weitere Vereinfachungen bringt. Außerdem ist ein Artikel über die Relativitätstheorie, den *Carathéodory* 1934 für die Große Griechische Enzyklopädie geschrieben hat, in deutscher Übersetzung durch den Sohn des Verfassers wiedergegeben. Er enthält eine außerordentlich klare und einfache Darstellung der speziellen und am Schluß einen kurzen Hinweis auf die allgemeine Relativitätstheorie.

Wenn die weiteren Bände der schönen Ausgabe im gleich raschen Tempo folgen, wie der zweite auf den ersten, so werden wir bald das Lebenswerk des großen Gelehrten bequem überblicken können.

J. Radon, Wien

Analytische Erkenntnistheorie. Kritische Übersicht über die neueste Entwicklung in USA. und England. Von *A. Pap*. VIII, 242 S. Wien: Springer-Verlag. 1955. Geb. S 144.—, DM 24.—, \$ 5.70, sfr. 24.50.

Es ist erfreulich, daß wieder einmal ein Buch in deutscher Sprache erschienen ist, welches jene philosophische Richtung pflegt, die vor etwa 25 Jahren ihren Ausgangspunkt in Österreich genommen hat und dann infolge der Ungunst der Zeit in ihrem Heimatland mehr und mehr in Vergessenheit geraten ist. Wir geben schlagwortartig den Inhalt wieder: I. Das empirische Sinnkriterium, II. Wirklichkeitssätze, Wahrnehmungssätze unter Phänomenalismus, III. Wahrheit und Wahrscheinlichkeit, IV. Kausalität und Gesetzmäßigkeit, V. Erklärung, VI. Logische Notwendigkeit. Den Mathematiker dürften besonders die Abschnitte III und VI interessieren. Es muß hervorgehoben werden, daß sich der Verfasser in völliger Übereinstimmung mit fast allen modernen Mathematikern befindet, wenn er die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Disziplin der reinen Mathematik anerkennt, von der eine Brücke zu den Anwendungen auf empirische Sachverhalte zu schlagen ist. Übrigens tritt bei der Besprechung der *Mises*'schen Häufigkeitsauffassung eine geringfügige Ungenauigkeit terminologischer Natur

auf. An Stelle des Ausdruckes „Reihe“ wäre von Folge zu sprechen. Im Abschnitt VI setzt sich der Autor unter anderem mit der logizistischen Auffassung in der Mathematik auseinander. Das Buch ist ohne Zweifel vor allen Dingen für einen philosophisch interessierten Leserkreis bestimmt. Es erscheint mir einen sehr guten Überblick über die Weiterentwicklung des Wiener Kreises in den angelsächsischen Ländern zu geben und zeigt wohl auch unverkennbar, daß diese Entwicklung fast ausschließlich von Fachphilosophen getragen wurde, während ein charakteristischer Zug des Wiener Kreises gerade die enge Zusammenarbeit mit Physikern, Mathematikern und Biologen war. *Schlick* selbst hat bekanntlich Physik studiert und in diesem Fach auch seinen Doktor gemacht.

L. Schmetterer, Wien

An Introduction to Deductive Logic. Von *H. Leblanc*. XII, 244 S. New York: J. Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1955. \$ 4.75.

Wenn man auf ein deutschsprachiges Werk hinweisen wollte, welches mit dem vorliegenden Buch vergleichbar ist, wird man am ehesten die „Grundzüge der theoretischen Logik“ von *Hilbert-Ackermann* nennen. Das Buch enthält jedoch einiges mehr als die üblichen Einführungen: Hinweise auf mehrwertige Logiken und auf die intuitionistische Logik und insbesondere eine etwas genauere Darstellung des Kalküls des natürlichen Schließens von *Gentzen*. Es beginnt mit einer — auch dem Nichtmathematiker — verständlichen Einführung in die Aussagenlogik und dem Prädikatenkalkül. Erst dann erfolgt der axiomatische Aufbau der beiden Kalküle. Symbolik und Axiomatik sind in Anlehnung an die *Principia Mathematica* gewählt. In einem weiteren Kapitel wird die Identität hinzugenommen und Klassen- und Relationslogik betrieben. Das letzte Kapitel rundet den Stoff durch die Einführung der Begriffe der Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Entscheidbarkeit und Unabhängigkeit ab. Für den Aussagenkalkül werden in dieser Richtung genauere Untersuchungen angestellt, für den Prädikatenkalkül *Gödel's* Vollständigkeitstheorem in großen Zügen bewiesen und noch einige weitere Dinge gestreift. Eine gewisse Fähigkeit zum abstrakten Denken vorausgesetzt, erscheint das Buch zur ersten Lektüre über den behandelten Gegenstand sehr gut geeignet.

L. Schmetterer, Wien

Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. Band 1, Heft 1. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.

Die neugegründete Zeitschrift wird von *G. Asser* und *K. Schröter* herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Gelehrter aus Deutschland, England, Polen, Ungarn und den nordischen Ländern. Dem Vorwort entnimmt man, daß abgesehen von den zitierten Disziplinen auch deren Grenzgebiete zu Wort kommen sollen, wie Mengenlehre und Theorie der rekursiven Funktionen. Den Herausgebern schwebt eine Zeitschrift vom Typ und Niveau der *Fundamenta mathematicae* vor, deren Betonung auf dem Gebiet der modernen mathematischen Logik liegt. Sie stellt die erste Zeitschrift dieser Art in deutscher Sprache dar. Das erste vorliegende Heft enthält Beiträge von *Asser*, *Peter* und *Schröter*.

L. Schmetterer, Wien

Archiv der Mathematik. Band V. Herausgegeben von *H. Bihlarz*, *H. Kneser*, *W. Süß*. 521 S. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1954. sfr. 72.—, DM 72.—.

Band V ist die Festschrift für *Alexander M. Ostrowski* mit Abhandlungen, die Freunde, Kollegen und Schüler dem verehrten Lehrer und Forscher zum 60. Geburtstag am 25. September 1953 widmeten. Band V besteht aus zwei

Teilen mit zusammen 521 Seiten. Er enthält 70 Abhandlungen von Autoren aus 11 Staaten.

N. Hofreiter, Wien

Der Briefwechsel von Johann Bernoulli. Band 1. Herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft Basel. 531 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1955. sfr. 60.—.

Die Naturforschende Gesellschaft in Basel hat sich entschlossen, eine Gesamtausgabe der Werke der Basler Mathematiker des 18. Jahrhunderts zu veranstalten. Dabei sollen sowohl ihre Werke wie auch ihr Briefwechsel mit Zeitgenossen aufgenommen werden. In bezug auf *Euler* ist dieser Plan zu einem großen Teil bereits durchgeführt. Es handelt sich jetzt nur um die *Bernoullis* und den heute fast vergessenen Mathematiker *Hermann*. Der Herausgeber *O. Spies* nimmt an, daß die Ausgabe 20–25 Bände umfassen wird. Der hier vorliegende Band bringt zunächst ein umfangreiches Vorwort des Herausgebers, welches die Vorgeschichte des Unternehmens, die dramatische Geschichte des *Bernoulli*-Nachlasses, die Beschreibung der nachgelassenen Schriften und den Plan der Gesamtausgabe erfaßt. Dann folgt der Briefwechsel von *Johann Bernoulli* mit seinem Bruder *Jakob* und mit *de l'Hôpital*. Dieser Briefwechsel ist deshalb von besonderem historischen Interesse, da er die Abhängigkeit des Marquis von *Johann Bernoulli* deutlich zeigt. Den Abschluß bilden Briefe nicht-wissenschaftlichen Inhalts aus den Jahren 1693 bis 1706, welche aber doch in vieler Hinsicht von Bedeutung sind. Die vollständige Ausgabe der Korrespondenz von *Johann Bernoulli* wird ungefähr 6 Bände umfassen. Diese Ausgabe kann des Dankes der mathematischen Welt sicher sein. Die Ausstattung des Buches ist prachtvoll. 5 Tafeln schmücken den Band.

E. Hlawka, Wien

Histoire abrégée des sciences Mathématiques. Von *M. d'Ocagne*. Vollendet von *R. Dugas*. 405 S. Paris: Librairie Vuibert. 1955.

Die vorliegende kurzgefaßte Geschichte der Mathematik wurde von *R. Dugas* nach einem von *d'Ocagne* hinterlassenen Manuskript veröffentlicht. Sie beginnt nach kurzen Hinweisen auf die Spuren mathematischer Tätigkeit bei Chaldäern, Phöniziern, Ägyptern und Chinesen mit den Leistungen der griechischen Mathematiker, wie *Pythagoras*, *Aristoteles*, *Euklid*, *Archimedes*, *Apollonius*, *Diophant*. Das zweite Kapitel bringt die für die Mathematik wenig fruchtbare Römerzeit, den Einfluß der indischen und arabischen Mathematik auf das Abendland und das langsam erwachende mathematische Leben im Mittelalter und Renaissance. Hier stoßen wir auf Namen wie *Fibonacci*, *Regiomontanus*, *Dürer* (dessen Vorname mit Albert angegeben wird), *Cardan*, *Vieta*, *Kepler*, *Galilei*, um nur einige herauszugreifen. Dann folgen — ausführlicher als im bisher genannten Teil — in drei Kapiteln die Mathematiker des 17., 18. und 19. Jahrhunderts. Die Leistungen jedes einzelnen werden hiebei zusammen mit seinem Lebenslauf kurz besprochen. Am ausführlichsten sind naturgemäß die Mathematiker des 19. Jahrhunderts besprochen (insgesamt etwa 160). Hier finden sich auch Hinweise auf das Schaffen der Gegenwart, allerdings in ganz rudimentärer Form. Ein Anhang über „Logistik“ und über „Mathematische Frauen“ beschließt das Werk. Die Darstellung ist stets interessant und flüssig. Infolge ihrer Kürze erhebt sie keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Manchmal hat man das Gefühl, daß der Verfasser seine Landsleute ein bißchen bevorzugt behandelt hat. So werden dem Mathematiker *Bertrand* drei Seiten gewidmet, während *Kronecker* gleich darauf mit nur einer Seite wekommt und *Tschebyscheff* überhaupt fehlt. Trotzdem ist die Lektüre des Buches ein Vergnügen und außerdem noch überaus lehrreich für alle, die sich für die Geschichte unserer Wissenschaft interessieren.

K. Prachar, Wien

Enzyklopädie der Elementarmathematik. Redaktion: *P. S. Alexandroff, A. I. Markuschewitsch, A. J. Chintschin*. Band I: Arithmetik (Hochschullehrbücher für Mathematik: Band 7). XI, 403 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1954.

Mit diesem Band ist der erste Band des aus 7 Bänden bestehenden russischen Werkes in deutscher Sprache erschienen. Die Enzyklopädie der Elementarmathematik ist als Handbuch für die Lehrer der Mathematik gedacht. Sie gibt eine systematische Darstellung der wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik. Darüber hinaus werden Probleme behandelt, die für das richtige Verständnis der Schulmathematik notwendig oder wünschenswert sind. Der erste Band ist der Arithmetik gewidmet und besteht aus vier Teilen. Im ersten Aufsatz geben *Baschmakowa* und *Juschkewitsch* historische Betrachtungen über die Bezeichnungsweisen der Zahlen. Der zweite Teil ist 160 Seiten stark. Darin gibt *Proskurjakow* eine theoretische Begründung der Arithmetik. Er beginnt damit, das Wesen der Mathematik vom dialektischen Materialismus aus darzulegen und bringt hiezu Zitate von *Friedrich Engels*. Das Hauptziel des Artikels ist, diejenigen Eigenschaften der Zahlen, die jedem von der Schule her bekannt sind, ausführlich zu begründen. Ferner wird der Leser mit den grundlegenden Ideen und Begriffen der modernen Mathematik bekannt gemacht (Menge, Gruppe, Ring, Körper). Es folgt sodann ausführlich der Zahlbegriff (natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen). Der dritte Teil ist von *Chintschin* verfaßt und ein ausgezeichnete Aufsatz über die Elemente der Zahlentheorie (Teilbarkeit, Kettenbrüche, diophantische Approximationen, algebraische und transzendente Zahlen). Hervorgehoben werden die grundlegenden Beiträge der russischen Mathematiker: *Tschebyschew, Winogradow, Schnierelmann* und *Gelfond*. Der letzte Aufsatz ist von *Bradis* verfaßt und der Näherungsrechnung, der Fehlerrechnung und den Hilfsmitteln des Rechnens gewidmet. Der Verfasser bedauert, daß der Mathematikunterricht an den russischen Schulen zu sehr formal ausgerichtet ist und setzt sich dafür ein, daß in der Schule auch die Näherungsrechnung betrieben wird.

Alle vier Teile des Buches zeichnen sich dadurch aus, daß sie die Grundbegriffe und die Probleme der Mathematik, aus denen die Schulmathematik besteht, in systematischer und leicht verständlicher Form darlegen. Sie enthalten zahlreiche Hinweise in methodischer und pädagogischer Hinsicht und viele historische Bemerkungen.

N. Hofreiter, Wien

Lehrgang der höheren Mathematik. Von *W. I. Smirnow*. Teil III/1 (Hochschullehrbücher für Mathematik: Band 3). VII, 283 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1954.

Eine Arbeitsgemeinschaft unter Anleitung von Prof. *L. Kaloujnine* hat diesen Band aus dem Russischen übersetzt. Er enthält die lineare Algebra, die Theorie der quadratischen Formen und die Gruppentheorie. Die Stoffauswahl ist durch das Ziel bedingt, dem Leser all das aus diesen drei Gebieten zu bringen, damit dieser die physikalische Literatur versteht. In der linearen Algebra tritt dies noch weniger zu Tage. Sie enthält wie üblich die Determinanten und die Systeme von linearen Gleichungen. Eine Beschränkung auf das Reelle wird i. a. nicht gemacht. Dieser Abschnitt enthält auch Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die Säkulargleichung, Funktionaldeterminanten und implizite Funktionen. Inhaltsreich ist das Kapitel über lineare Transformationen und quadratische Formen. Abgesehen von Transformationen von Matrizen, quadratischen Formen und hermiteschen Formen auf Normalformen, werden

Abbildungen im Hilbertschen Raum betrachtet. Es folgen vollständige Orthogonalsysteme, Zusammenhänge zwischen dem Funktionenraum und dem Hilbertschen Raum und Funktionaloperatoren. Das Kapitel über Gruppentheorie enthält zunächst Gruppen von Transformationen, Permutationsgruppen, einiges über abstrakte Gruppen, insbesondere Isomorphismus und Homomorphismus, ferner spezielle Gruppen wie die Lorentzgruppe, die Gruppe der Bewegungen und die lineare Gruppe. Der zweite Teil der Gruppentheorie ist der Darstellungstheorie gewidmet. Es finden sich hier zahlreiche grundlegende Sätze, ferner die lineare Darstellung der unitären Gruppe, der Drehungsgruppe, das Kronecker-Produkt, die lineare Darstellung der direkten Produkte, Charaktere und zuletzt die Konstruktion von Gruppen aus Strukturkonstanten und die Integration auf einer Gruppe.

Das Buch ist den Studierenden der Mathematik und der theoretischen Physik wärmstens zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien

Algebraische Gleichungen beliebigen Grades. Von *A. G. Kurosch*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschullehrbüchern für Mathematik.) Mit 3 Textabb., 35 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1954.

Es wird eine Übersicht über elementare Tatsachen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen gegeben. Ausführlich werden die komplexen Zahlen als Zahlenpaare eingeführt und das Rechnen mit solchen Zahlenpaaren erläutert. An numerischen Beispielen wird das Auflösen einer quadratischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten und das Auflösen von kubischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten und positiver Diskriminante gezeigt. Ferner wird berichtet: Über den Fundamentalsatz der Algebra, über die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung von höherem als viertem Grade, über die Existenz von reellen Lösungen, über das Berechnen einer Näherungslösung nach *Newton*. Den Schluß bildet eine kurze Betrachtung über den Zahlkörper. Es ist eine lesenswerte Lektüre für mathematisch interessierte Schüler der 7. bzw. 8. Klasse unserer Mittelschulen.

J. Laub, Wien

Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Von *E. Hecke* †. Zweite, unveränderte Auflage, herausgegeben von *W. Maak*. VIII, 264 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1954. Geb. DM 11.—.

Die erste Auflage erschien 1923 und wurde in dieser Zeitschrift: *Mh. Math.* **34**, 10 (1926) ausführlich besprochen. Wenn auch in den letzten 30 Jahren auf dem Gebiete der algebraischen Zahlentheorie schöne Ergebnisse erzielt wurden, so ist es durchaus zu verantworten, wenn das Buch in unveränderter Auflage herausgegeben wurde. Es bleibt sicher auch weiterhin ein sehr beliebtes Lehrbuch der Zahlentheorie in deutscher Sprache.

N. Hofreiter, Wien

Class Field Theory. Von *C. Chevalley*. 104 S. Nagoya University. 1954.

Das Buch ist aus Vorlesungsmanuskripten entstanden, die der Verfasser 1953/54 anfertigte, als er an der Universität Nagoya Vorlesungen hielt. Ziel dieser Vorlesungen war, die Hörer mit den neueren Methoden der Klassenkörpertheorie bekannt zu machen. Während zuerst bei *Hilbert*, *Furtwängler* und *Takagi* ausschließlich relativ-abelsche Erweiterungen betrachtet wurden, werden in den neueren Untersuchungen zur Klassenkörpertheorie, die auf *Artin*, *A. Weil*, *Nakayama*, *Tate* u. a. zurückgehen, Erweiterungen betrachtet, die nicht-abelsch

sind. Auch die Methoden, die früher rein arithmetisch waren, sind durch topologisch-gruppentheoretische ersetzt worden. Besonders die cohomologischen Methoden sind es, die heute in der Klassenkörpertheorie mit Vorteil angewendet werden. Lesern mit guten algebraischen Vorkenntnissen wird durch das Buch die Möglichkeit gegeben, die neueren Untersuchungen zur Klassenkörpertheorie kennen zu lernen.

N. Hofreiter, Wien

Higher Transcendental Functions. Band 3. Nach Aufzeichnungen von *H. Bateman*, herausgegeben von *A. Erdélyi* unter Mitarbeit von *W. Magnus*, *F. Oberhettinger* und *F. G. Tricomi*. New York — Toronto — London: McGraw-Hill. 1955.

Dies ist der dritte Band des großangelegten Sammelwerkes über spezielle Funktionen, welches von einem Stab von Mitarbeitern unter Förderung des California Institute of Technology und Office of Naval Research verfaßt wurde. Das Buch enthält Formeln und Lehrsätze über folgende Funktionen: Automorphe Funktionen, Lamé'sche Funktionen, Mathieu'sche Funktionen, Sphäroidfunktionen sowie eine Einführung in die Funktionen der Zahlentheorie, ein Kapitel über verschiedene weniger verwendete spezielle Funktionen wie z. B. Mittag-Leffler'sche *E*-Funktionen. Ein Schlußkapitel bringt erzeugende Funktionen für die verschiedensten Funktionenklassen, darunter auch erzeugende Funktionen von mehreren Variablen. Besonders bemerkenswert ist, daß, wie schon aus dieser kurzen Aufzählung hervorgeht, auch Funktionen behandelt werden, die man sonst in Büchern über spezielle Funktionen nicht findet. Dabei wurde auch auf Dinge Wert gelegt, die man für gewöhnlich in die „reinste Mathematik“ zählt und in solche Bücher nicht aufnimmt wie z. B. die Siegel'schen Untersuchungen über automorphe Funktionen mehrerer Veränderlichen. Das Kapitel über die zahlentheoretischen Funktionen enthält so unter anderem auch eine Zusammenfassung der Theorie der Riemann'schen Zetafunktion und der Dirichlet'schen *L*-Funktionen. Hier wäre vielleicht zu bemerken, daß das Restglied im Primzahlsatz auf S. 191 nicht das beste bisher bekannte Resultat darstellt.

Dieses Sammelwerk ist in seiner Art einzig dastehend. Es wird sowohl dem Mathematiker als auch dem Physiker und Naturwissenschaftler überhaupt als Nachschlagewerk unentbehrlich sein. Andererseits ist es auch ausgezeichnet geeignet, sich in ein unbekanntes Gebiet einzuarbeiten, da die sehr klaren Zusammenfassungen theoretischer Sachverhalte einen guten Überblick ermöglichen. Als Fortsetzung dieses dreibändigen Werkes (für die Besprechung der ersten beiden Bände siehe diese Monatshefte 58, 311, 1954) ist ein zweibändiges Tafelwerk über Integraltransformationen geplant, dessen Erscheinen man mit Interesse erwarten kann.

K. Prachar, Wien

Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach. Von *M. G. Heilbronn* (Mémorial des sciences mathématiques: fasc. CXXIX). 96 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955.

Drach hat in Weiterführung des Ampèreschen Verfahrens die Integration von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt; seine Methode wird hier sehr klar und übersichtlich zusammengestellt.

H. Hornich, Graz

Lectures on partial differential equations. Von *I. G. Petrovsky*. Übersetzt aus dem Russischen von *A. Shenitzer*, X, 245 S. New York — London: Interscience Publishers. 1954. \$ 5.75.

Die hier vorliegenden ins Englische übertragenen Vorlesungen des bekannten Mathematikers der Moskauer Universität gelten nach einem ersten allgemeinen Kapitel zum Cauchy'schen Problem vornehmlich den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Bei den hyperbolischen Differentialgleichungen werden u. a. im Anschluß an die Wellengleichung die Lorentztransformation und natürlich die Eigenwertprobleme, bei den elliptischen hauptsächlich die Laplace'sche Gleichung und ihre Randwertprobleme und endlich nur ganz kurz die parabolischen Gleichungen behandelt. Die Darstellung ist ausgezeichnet.

H. Hornich, Graz

Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Von N. I. Achieser und I. M. Glasmann. (Forschungsinstitut für Mathematik. 1. Abteilung, Mathematische Lehrbücher: Band IV.) VII, 369 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 28.—.

Eine umfassende moderne Darstellung der linearen Operatoren im Hilbertschen Raum hat in der deutschsprachigen Literatur schon lange gefehlt. Das Buch von Nagy und das Bändchen von Schmeidler haben andere Aufgaben zu erfüllen, das eine als knapper Überblick, das andere als Einführung. Die Übersetzung dieses ausgezeichneten Werkes aus dem Russischen muß daher unbedingt begrüßt werden. Die Darstellung ist etwas allgemeiner als üblicherweise. Separabilität wird nicht vorausgesetzt. Im 5. Kapitel wird bei der Spektralanalyse vollstetiger Operatoren auf die Vollständigkeit des Raumes verzichtet. Die ersten vier Kapitel sind den Grundbegriffen gewidmet. Hier und auch später muß auf die zahlreichen konkreten Beispiele hingewiesen werden. Kenntnis der grundlegenden Dinge aus der Lebesgue'schen Theorie ist allerdings unerlässlich. Das wichtige 6. Kapitel leitet mit dem trigonometrischen Momentenproblem ein, bietet in diesem Zusammenhang den Satz von Bochner über die Fourierdarstellung positiv definiter Funktionen dar und schafft damit die Voraussetzungen für die Integraldarstellung unitärer Operatoren. Als Vorbereitung für die Integraldarstellung selbstadjungierter Operatoren bzw. deren Resolvente wird die Integraldarstellung analytischer Funktionen in einer Halbebene studiert. Es wird noch ein zweiter Beweis dieser Integraldarstellung gegeben, die sich auf die Tatsache stützt, daß die Caley-Transformierte eines selbstadjungierten Operators ein unitärer Operator ist. Wir heben noch die Untersuchungen über Ringe beschränkter selbstadjungierter Operatoren hervor. Hier wird auch der Satz von v. Neumann über die Erzeugung schwach abgeschlossener Ringe formuliert, aber nicht bewiesen. Das nächste Kapitel ist der Theorie der Erweiterung symmetrischer Operatoren gewidmet, enthält die Formel von Krein für die Resolvente selbstadjungierter Erweiterungen und führt in die Theorie halbbeschränkter Operatoren ein. In diesem Zusammenhang wird der diesbezügliche Erweiterungssatz von v. Neumann bewiesen. Weitere Resultate über symmetrische Erweiterungen werden mit Literaturhinweisen erwähnt. Es folgen zwei umfangreiche Anhänge. Der erste stützt sich auf die Untersuchungen von Neumark über die verallgemeinerte Spektralfunktion, der zweite behandelt die Differentialoperatoren und enthält z. B. neue Ergebnisse von Glasmann und im Zusammenhang mit den von selbstadjungierten Operatoren erzeugten Umkehrformeln die allgemeinen Untersuchungen von Krein über Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Jedem, der tiefer in die Materie eindringen will, muß das Buch sehr empfohlen werden. Die Übersetzung ist gelungen und läßt kaum mehr erkennen, daß ein fremdsprachiger Text zu Grunde lag.

L. Schmetterer, Wien

Formes extérieures et leurs applications. Band 1. Von W. *Slebodzinski*. (Polska Akademia Nauk Monografie Matematyczne: Band XXXI.) VI, 154 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1954.

Das vorliegende Buch ist der erste Teil eines Werkes über die alternierenden Formen und umfaßt den algebraischen Teil der Theorie, während der zweite Band die Theorie der alternierenden Differentialformen behandeln soll, die bekanntlich heute in der Analysis ausgedehnte Anwendung finden.

Der Verfasser definiert im ersten Kapitel die alternierenden Formen mit Hilfe multilinearer Formen, die beim Vertauschen zweier Variablenreihen das Vorzeichen wechseln, erklärt dann die algebraischen Operationen (Addition und Multiplikation) und untersucht Fragen der Teilbarkeit. Die Formen zweiter Ordnung werden eingehend behandelt; es folgt die Betrachtung von Dichten (Formen, die bei linearer Transformation der Variablen eine Potenz der Transformationsdeterminante als Faktor annehmen) und der adjungierten Formen. Im zweiten Kapitel werden alternierende Gleichungen behandelt, d. h. es wird nach jenen linearen Mannigfaltigkeiten gefragt, deren Graßmann'sche Koordinaten eine oder mehrere gegebene alternierende Formen zu Null machen. Bei dieser Gelegenheit werden die zwischen den Graßmann'schen Koordinaten bestehenden Relationen hergeleitet. Die Definition der charakteristischen Elemente sowie der Klasse eines alternierenden Systems beschließen das Kapitel.

Im dritten Kapitel wird der „symplektische“ Raum studiert, d. h. ein Raum von $2r$ -Dimensionen, dessen Geometrie durch die Gruppe der „symplektischen“ Transformationen, das sind lineare Transformationen, die eine alternierende quadratische Form vom Rang $2r$ invariant lassen, definiert ist. Es werden unter anderem die infinitesimalen Transformationen der symplektischen Gruppe ermittelt und diese als einfache Gruppe erkannt. Das Produkt der symplektischen und der Ähnlichkeitsgruppe erweist sich als die allgemeine lineare Gruppe in $2r$ -Dimensionen. Die Invariantentheorie der symplektischen Gruppe wird ebenfalls weitgehend entwickelt.

Das letzte Kapitel ist den Anwendungen gewidmet; als solche werden behandelt: Determinanten, infinitesimale Drehungen des euklidischen und symplektischen Raumes sowie der lineare Komplex (sowohl im allgemeinen Sinn wie insbesondere der Geradenkomplex). Das klar und gut lesbar geschriebene Buch ist eine sehr willkommene Einführung in den wichtigen Gegenstand, deren Studium warm empfohlen werden kann.

J. Radon, Wien

Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von B. W. *Gnedenko* und A. J. *Chinč'in*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschullehrbüchern für Mathematik: Band VIII.) 135 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955.

Das Buch hat die Aufgabe, Lesern mit verhältnismäßig geringer mathematischer Vorbildung das Verständnis für die Wahrscheinlichkeitsrechnung nahe zu bringen. Die beiden bedeutenden Autoren haben die Darstellung auf zahlreichen Beispielen aufgebaut und es dabei doch verstanden, im Geiste der modernen Auffassung theoretisch Wichtiges herauszuarbeiten. So wird z. B. für elementare Fälle der Begriff der Zufallsgröße und ihres Verteilungsgesetzes eingeführt. Die Darstellung gipfelt in der Tschebaschef'schen Ungleichung und einem darauf basierenden Beweis eines einfachen Sonderfalles des Gesetzes der großen Zahlen. Es folgt noch die Einführung in die Gauß'sche Verteilung.

Schlußbemerkungen würdigen vor allen Dingen die Leistungen russischer Wahrscheinlichkeitstheoretiker des 19. und 20. Jahrhunderts. *L. Schmetterer*, Wien

An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications. Von *M. S. Bartlett*. Mit Textabb., XIV, 312 S. Cambridge: At the University Press. 1955. 35 s. net.

Das Buch beginnt mit einer Rekapitulation der für das Verständnis notwendigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Voraussetzungen. Mathematische Schwierigkeiten bei der Definition eines allgemeinen stochastischen Prozesses werden durch einen Hinweis auf *Doob* angedeutet. Dann machen die einfachsten Zufallswegsprobleme in der Darstellung von *Wald* den Anfang und leiten zu allgemeinen Betrachtungen über Markoff'sche Ketten über. Es werden hierauf die für physikalische und genetische Fragen wichtigen multiplikativen Prozesse betrachtet. In einem folgenden Kapitel werden diese Untersuchungen für den Fall kontinuierlicher Prozesse durchgeführt. Unter den folgenden Anwendungen sollen z. B. die Sequential-Analyse, jene Wartezeit und Maschinenstillstandsprobleme, die in der englischen Literatur als *Queues* bezeichnet werden und die mathematischen Modelle für die Ausbreitung von Epidemien hervorgehoben werden. Im Mittelpunkt des folgenden Kapitels stehen die stochastischen linearen Differenzen und Differentialgleichungen. Dann wird die Spektraltheorie der im weiteren Sinne stationären Prozesse studiert, die Spektraldarstellung der Autokorrelationsfunktion von *Chincin* gegeben und in die verallgemeinerte harmonische Analyse eingeführt. Schließlich werden auch mehrdimensionale (stationäre) Prozesse betrachtet. Aktuelles Interesse kommt auch einer Einführung in die Predictiontheorie und die Nachrichtentheorie zu. Auch der Fall gestörter Übertragung wird behandelt. Zwei recht umfangreiche Schlußkapitel beschäftigen sich mit der statistischen Auswertung stochastischer Prozesse, Fragen der Schätzung, der Periodogrammanalyse und der Auswertung und Korrelationstheorie von Zeitreihen.

Das Buch ist nicht von der mathematischen Schärfe, die z. B. das Werk von *Doob* aufweist, nimmt aber auch infolge seiner Betonung der Anwendung eine andere Stellung ein. Vieles dürfte hier zum ersten Mal eine zusammenfassende Darstellung gefunden haben. Berührungspunkte mit dem Buch von *Feller* und teilweise mit dem von *Fortet* und *Blanc-Lapierre* liegen in der Natur der Sache. Stellenweise erscheint die Darstellung etwas knapp. Das Buch ist interessant geschrieben und stellt eine wichtige Ergänzung zu den schon bestehenden Werken über diesen Gegenstand dar.

L. Schmetterer, Wien

Die Idee der Riemannschen Fläche. Von *H. Weyl*. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 13 Textabb., VIII, 162 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1955. DM 22.—.

Dieses Buch, das 1913 erstmalig erschienen ist (man vergleiche die Besprechung in Bd. 26 dieser Zeitschrift), liegt nun in beträchtlich umgearbeiteter Gestalt wieder vor. Diese Umarbeitung ist dem Verfasser überaus gut gelungen, denn einerseits wird jetzt der erste, topologische Teil — den in letzter Zeit erfolgten, großen Fortschritten der Topologie entsprechend — in wesentlich allgemeinerer Form aufgebaut und auch beträchtlich erweitert, anderseits ist — besonders durch das Abgehen von dem Verfahren der Triangulation — die Darstellung einheitlicher und durchsichtiger, schließlich aber bleibt dabei die Ge-

samtlinie des Buches durchaus erhalten, auf der ja nicht zuletzt seine Eigenart und Wirkung beruht.

Unter den gegenüber den ersten beiden Auflagen erfolgten Änderungen und Erweiterungen sind vor allem folgende zu erwähnen: Der Begriff der Fläche, der früher durch die Möglichkeit einer Triangulation erklärt war, ist jetzt durch das Axiom der Abzählbarkeit festgelegt. Der Begriff der Riemann'schen Fläche wird gewonnen aus dem der lokalen topologischen Abbildung und des lokalen Koordinatensystemes. Je nach Wahl der Gruppe, welche die zulässigen lokalen Koordinatensysteme eines Flächenpunktes ineinander überführt, erhält man in fortschreitender Spezialisierung die glatten, die orientierten glatten und die Riemann'schen Flächen. Auch die allgemeinen orientierten Flächen werden auf diese Art erklärt. Dem Differential auf der Riemann'schen Fläche wird jetzt die lineare Differentialform als Differential auf einer beliebigen glatten Fläche zur Seite gestellt; für geschlossene, d. h. im kleinen exakte Differentiale wird ein Linienintegral erklärt und dem für beliebige topologische Flächen gültigen Begriff der Integralfunktion untergeordnet. Neben den Begriff der Homologie geschlossener Wege tritt jetzt bei glatten Flächen der der schwachen Homologie, neben den Zusammenhangsgrad der schwache Zusammenhangsgrad, und die schlichtartigen Flächen werden jetzt erklärt als Flächen mit schwachen Zusammenhangsgrad 0. Vollständig neu dazugekommen ist die eingehende Behandlung des Flächenintegrals über eine auf einer orientierten glatten Fläche gegebene Dichte, wobei eine von *Dieudonné* eingeführte Methode verwendet wird. Auch die Definition der Schnitzzahl zweier beliebiger Kurven auf einer orientierten glatten Fläche durch eine aus Flächen- und Linienintegralen gebildete Formel ist neu aufgenommen. Daß der schwache Zusammenhangsgrad — falls endlich — stets eine gerade Zahl ist, wird jetzt daraus gefolgert, daß die schief-symmetrische Charakteristikenform nicht ausgeartet ist. Der zweite funktionentheoretische Teil des Buches ist wesentlich weniger verändert, allerdings wirkt sich der Umbau des ersten Teiles natürlich auch hier aus. So ermöglichen z. B. die vorhergehenden Untersuchungen über die Schnitzzahl zweier Kurven eine übersichtlichere Behandlung der Symmetriegesetze für die Elementarintegrale.

Abschließend sei nochmals betont, daß die Neubearbeitung wieder zu einem völlig einheitlichen und geschlossenen Werk geführt hat, und wenn schon an der ersten Auflage besonders auch der hohe ästhetische Wert gerühmt wurde, so hat das Buch jetzt daran noch bedeutend gewonnen.

W. Nöbauer, Wien

Cours de géométrie infinitésimale (Cours de L'Ecole Polytechnique). Von *G. Julia*.

Zweite Auflage. 4. Heft: Cinématique et géométrie cinématique.

2. Teil. 88 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955.

In Fortsetzung des dritten Heftes wird zunächst die ebene Kinematik weiterentwickelt. Hier sei besonders auf die eingehende Diskussion der Formel von *Euler-Savary* hingewiesen, deren Beweis mittels einer eleganten geometrischen Methode von *Koenigs* erfolgt. Als Beispiel wird die Epizykloidenbewegung ausführlich betrachtet. Dann folgt die Kinematik im Raum; zuerst wird der starre Körper mit einem festen Punkt, hierauf der allgemeine Fall behandelt. Hier werden der lineare Komplex der Normalen und der quadratische Komplex der Tangenten der Momentanbewegung diskutiert, ferner die Einhüllende einer im Körper festen Fläche sowie die Frage nach Kurven, die bei der Bewegung eine Einhüllende haben. Endlich wird die Bewegung zweier Körper studiert, die einander ständig berühren. Als Anwendung wird die Bewegung studiert, welche das begleitende Dreibein einer Raumkurve ausführt, wenn diese durchlaufen wird.

Das Heft, das drei Kapitel aus dem Cours an der Ecole Polytechnique umfaßt, bildet zusammen mit dem früher besprochenen zweiten Heft (siehe Monatshefte für Mathematik 59, S. 158) eine empfehlenswerte Einführung in die Kinematik.

J. Radon, Wien

Bemerkenswerte Kurven. Von *A. I. Markuschewitsch*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschullehrbüchern für Mathematik.) Mit 33 Textabb., 30 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1954.

Die Gerade, die Kegelschnitte und die Lemniskate werden als Ortslinien betrachtet. Es wird referiert, daß die ebenen Schnitte eines Drehzylinders bzw. eines Drehkegels Kegelschnitte sind. Ferner wird eine Verallgemeinerung der Lemniskate erwähnt, der Lemniskate mit n -Brennpunkten, und berichtet, daß sie zur Approximation beliebiger Kurven verwendet werden kann. Den Abschluß bildet eine kurze Betrachtung der gemeinen Zykloide in ihrer Eigenschaft als Radlinie und Brachistochrone. Das Büchlein ist, wie der Verfasser im Vorwort erwähnt, für Schüler und für erwachsene Leser bestimmt, deren mathematische Kenntnisse nur der Mittelschulbildung entsprechen.

J. Laub, Wien

Anschauliche Topologie. Von *W. Lietzmann*. Mit 217 Textabb., 172 S. München: Verlag R. Oldenbourg. 1955. DM 14.80.

Das Buch behandelt die geometrischen Fragen, von denen die moderne, abstrakte Topologie ihren Ausgang genommen hat; es wird dabei der Zweck verfolgt, den Leser auf die Beschäftigung mit dieser vorzubereiten. Deshalb wird auf analytische Beweismethoden grundsätzlich verzichtet und der Anschauung viel Raum gegeben. Das hat zur Folge, daß natürlich manche der besprochenen Sätze nicht exakt bewiesen, sondern eben nur anschaulich plausibel gemacht oder überhaupt nur angeführt werden können, anderseits jedoch führt es dazu, daß einige interessante Probleme aus der sogenannten Unterhaltungsmathematik aufgenommen wurden, deren Untersuchung auf topologische Fragen führt, wie Labyrinth, Rösselsprünge, Überfahrten u. a.

Der erste Teil des Buches enthält die Linientopologie. Nachdem einleitend kurz die Stellung der Topologie innerhalb der Geometrie umrissen wurde, werden hauptsächlich folgende Dinge behandelt: Maschen und Schlingen sowie Verschlingungen eines Fadens, Verknüpfung von Fäden, Zöpfe, Graphen, Knoten, Kränze, der Euler'sche Satz über Vielecksnetze, unikursale Kurven, Ketten. Der zweite Teil beschäftigt sich mit Flächentopologie: Ausgehend vom Eulerschen Polyedersatz (der auf mehrere Arten bewiesen wird), werden die Begriffe Zusammenhang und Geschlecht anschaulich entwickelt. Dann werden einseitige Flächen und Fragen der Orientierbarkeit betrachtet; es folgen Gebietseinteilungen (mit einem Beweis des Fünffarbensatzes, der Besprechung des Vierfarbenproblems und des Grenzfaltenproblems), Parkettierungen der Euklidischen Ebene, die projektive Ebene und endliche Modelle davon. Zum Abschluß erfolgt die anschauliche Diskussion einiger einfacher Riemann'schen Flächen.

Die zahlreichen, fast durchwegs sehr geschickt gezeichneten Abbildungen erleichtern das Verständnis beträchtlich; in vielen Fußnoten wird auf Lehrbücher und Originalarbeiten hingewiesen. Man kann jedenfalls sagen, daß das Buch seinen Zweck sicherlich erreichen wird.

W. Nöbauer, Wien

Studies in Mathematics and Mechanics. *R. von Mises* von Freunden, Kollegen und Schüler gewidmet. Mit Textabb., IX, 353 S. New York: Academic Press Inc. 1954. \$ 9.—.

Der dem inzwischen verstorbenen Mathematiker *Richard v. Mises* gewidmete Band mathematischer Miszellen enthält insgesamt 42 Arbeiten aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Mechanik, welche dem Forscher zu seinem 70. Geburtstag überreicht wurden. Als Herausgeber zeichnen *G. Birkhoff*, *G. Kuerti* und *G. Szegő*. Der Band enthält auch ein Bild des Verstorbenen sowie das Verzeichnis seiner Schriften und ein Vorwort von *Ph. Frank*. Das Schöne an diesem Band ist, daß hier so viele Gebiete der Mathematik und Mechanik gleichzeitig zu Worte kommen, wie dies auch dem universellen Geist *v. Mises'* entspricht, der — wie man erfährt — z. B. auch literarische Forschungen über *Rilke* getrieben hat. So finden sich hier Arbeiten über abstrakte Algebra, Potentialtheorie, Elastizitätstheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie u. a. einträchtig nebeneinander. Die Lektüre dieser Arbeiten, welche zum Großteil von prominenten Autoren stammen, ist ein Genuß für jeden, der sich für „reine und angewandte“ Mathematik interessiert.

K. Prachar, Wien

Die Hauptprobleme der äußeren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik.

Von *K. Popoff*. Zweite Auflage. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Reihe A: Band 11.) Mit 20 Textabb., XV, 278 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1954. DM 22.—.

Das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser in verschiedenen Jahren in Deutschland und Frankreich gehalten hat. Der Verfasser verfolgt durchaus nicht den Zweck, die verschiedenen guten und eingelebten Lehrbücher der äußeren Ballistik zu ersetzen, die vielfach das Gebiet vollständig und systematisch behandeln, zum Teil sich auch mit den in neuester Zeit erst auftretenden Problemen auseinandersetzen. Das Ziel des Werkes ist vielmehr, den bisher entwickelten Theorien die streng mathematische Basis zu geben. So wie die Himmelsmechanik liegt ja auch in der äußeren Ballistik die nicht durch Systembedingungen eingeschränkte Bewegung eines starren Körpers vor. Aber im Gegensatz zur Himmelsmechanik hat man es mit Kräften zu tun, die sich nicht von einem Potential ableiten lassen. Die vorliegende zweite Auflage von *Popoffs* Buch umfaßt wie schon die erste als Hauptabschnitte die Bewegung des Massenpunktes in der Atmosphäre konstanter Dichte und in einer solchen von veränderlicher Dichte. Das erste Hauptproblem der äußeren Ballistik stellt die Lösung der sogenannten Hodographengleichung dar, d. i. die Differentialgleichung, die die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit mit der Neigung der Bahn verbindet. Der Einfluß veränderlicher Dichte wird für den Fall ihrer durch ein Exponentialgesetz und den durch ein hyperbolisches Gesetz festgelegten Abhängigkeit von der Höhe untersucht. Neu ist der in der ersten Auflage nicht enthaltene Abschnitt über die Drehung des Geschosses, in dem von den Eulerschen Gleichungen ausgehend die Präzessionsbewegung und die Nutationsbewegung untersucht wird. Hier spielen neben den älteren Methoden der Behandlung die eigenen Untersuchungen des Verfassers eine wichtige Rolle. Wie schon die erste Auflage ist auch die jetzt vorliegende neue sehr geeignet bei prinzipiellen Untersuchung aller in die äußere Ballistik einschlägiger Fragen eine sichere Anleitung zu geben.

A. Basch, Wien

Gas Dynamics of Thin Bodies. Von *F. I. Frankl* und *E. A. Karpovitch*. Mit 33 Textabb., VIII, 175 S. London, New York: Interscience Publishers. \$ 5.75.

Dies ist die englische Übersetzung eines in der Sowjetunion erschienenen Buches, welches einen Einblick in die dort betriebenen Forschungen auf dem Gebiete der Ärodynamik vermittelt. Das Buch zerfällt in fünf Kapitel. Nach einer Einleitung über die Leistungen der russischen Forscher und über die Wellengleichung bringt das zweite Kapitel die Theorie der Bewegung eines Rotationskörpers bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit. Dann folgt die stationäre Bewegung eines Tragflügels unendlicher Spannweite mit Unter- bzw. Überschallgeschwindigkeit und dasselbe Problem für endliche Spannweite, welches ungefähr gleichzeitig von *E. A. Krasilschtschikowa* und *J. Evvard* gelöst wurde. Kap. 4 bringt nichtstationäre Bewegungen von Tragflügeln und die Theorie der Propeller. Zu der letzteren hat der erste Autor selbst wesentliche Beiträge geliefert. Das letzte Kapitel behandelt kegelige Strömungen und deren Verallgemeinerungen.

Die Darstellung ist sehr klar und ausführlich, jedoch werden die Grundlagen der Ärodynamik als bekannt vorausgesetzt. Da hier zahlreiche Dinge erstmalig in Buchform dargestellt werden, so wird man dem Übersetzer darin beistimmen, daß dieses Buch eine große Hilfe für Ingenieure, Studenten der Ärodynamik und „angewandte Mathematiker“ überhaupt sein wird.

K. Prachar, Wien

Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Von *W. Cauer*. Zweite Auflage, herausgegeben und aus dem Nachlaß ergänzt von *W. Klein* und *F. M. Pelz*. Mit 477 Textabb., XXIV, 769 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 48.—.

Die Probleme der elektrischen Nachrichtentechnik wie z. B. der Entwurf von verschiedenen Filterkombinationen, Frequenzweichen usw. führen zu einem neuen Zweig der Elektrotechnik, nämlich einer systematischen Theorie der linearen Wechselstromschaltungen oder „Netzwerke“. Während man schon in den Elementen der Wechselstromtechnik lernt, wie man das Verhalten von Zweipolen, Vierpolen usw. berechnet, wenn z. B. Spannungen einer gewissen Frequenz angelegt werden, handelt es sich in der neuen Theorie um das viel schwierigere umgekehrte Problem bei vorgegebener Frequenz-Abhängigkeit der Betriebsdaten wie Dämpfung, Übertragsfaktor usw. eine entsprechende Schaltung zu finden. Falls mehrere solche Schaltungen existieren, entsteht die Aufgabe, die „beste“ herauszufinden. Bevor der Verfasser sich systematisch mit diesen Problemen befaßte, waren diese nur in speziellen Fällen gelöst worden. Als 1941 die erste Auflage dieses Buches erschien, wurden die darin entwickelten Gedanken von den Technikern zunächst mit Mißtrauen aufgenommen. Dies war nicht zu verwundern, da die von *Cauer* entwickelten Methoden ziemlich weitgehende Kenntnisse aus der Funktionentheorie, ja sogar aus der Topologie der Streckenkomplexe voraussetzten. Zwar hatte schon *Krichhoff* die letztere Theorie ausgiebig benützt, doch waren seine Regeln (nicht zu verwechseln mit den Kirchhoff'schen Regeln des elementaren Physikunterrichtes) so ziemlich in Vergessenheit geraten. Es ist eines von den Verdiensten dieses Werkes, daß sich auch diese Regeln hier finden. Es ist in der Folgezeit rasch die Wichtigkeit der *Cauer*'schen Untersuchungen erkannt worden. Nachdem *Cauer* bei Kriegsende unter tragischen Umständen ums Leben gekommen war, wurde die vorliegende zweite Auflage seines Buches aus Aufzeichnungen seines Nachlasses herausgegeben. Die Herausgeber haben das Werk jedoch noch wesentlich erweitert und die ursprünglich etwas schwer lesbare Darstellung durch Hinweise und Anmerkungen geglättet. So haben sie z. B. in einem Einführungskapitel eine Art Motivierung der Problemstellungen gegeben. Infolge des großen Umfangs des Werkes geben wir hier nur die Kapitelüberschriften: Aufgaben-

stellung und Beispiele, Berechnung der Eigenschaften gegebener Schaltungen, Vierpole, Positive Funktionen und positive Matrizen, Reaktanztheoreme, Wellenparametertheorie der Tiefpaßbreaktanzfilter, Wellenparametertheorie allgemeiner Filter, Reaktanzvierpole mit vorgegebenen Betriebseigenschaften, Frequenzweichen, Äquivalenz von Reaktanzschaltungen. Dazu kommen noch verschiedene Anhangskapitel, z. B. eine Einführung in die lineare Algebra und eine Einführung in die komplexe Funktionentheorie, verschiedene Extremalprobleme vom Tschebyscheff'schen Typus, bei deren Lösung u. a. auch elliptische Funktionen nötig sind, eine Vierpol-Formelsammlung und Anleitungen für die praktischen Anwendungen der verschiedenen Methoden mit Tafeln und Diagrammen. Da dieses Buch das Lebenswerk *Cauers* darstellt, wurde ihm auch ein Bild und Lebenslauf des Verfassers beigegeben.

Dieses reichhaltige und tiefgründige Werk zeigt klar, wie selbst „ausgefallene“ Dinge der Mathematik immer wieder überraschende Anwendungsgebiete finden, welche für Mathematiker, Physiker und Techniker gleichermaßen interessant sind.

K. Prachar, Wien

Einführung in die Quantenelektrodynamik. Von *W. Thirring*. Mit 18 Textabb. und einem Anhang mit Übungsaufgaben und Lösungen, XII, 122 S. Wien: F. Deuticke. 1955. S 105.—.

Das vorliegende Buch ist, soweit dem Referenten bekannt, das erste, welches im Hinblick auf die bedeutenden, ja in gewissem Sinne abschließenden Fortschritte der Quantenelektrodynamik nach dem Kriege geschrieben wurde. Seiner Anlage nach ist es als ein Streifzug durch die Theorie zu bezeichnen, der keinen Anspruch auf Vollständigkeit in der Behandlung der Themen erhebt.

Nach einer sehr anschaulichen qualitativen Übersicht über die atomaren Vorgänge und einem kurzen Abriss der klassischen Elektrodynamik folgt zunächst eine Darstellung der Quantentheorie der Felder in der Lagrange'schen Formulierung von *Schwinger* und deren Anwendung auf Vakuumfelder. Schwankungserscheinungen und Beschränkungen der Meßbarkeit werden ausführlicher diskutiert. Dann folgen die Felder in Wechselwirkung: Zunächst die Emission von langwelligen Photonen, dann eine abgekürzte Behandlung der Lamb-Shift; die Klein-Nishina-Formel wird hergeleitet, ebenso der Vakuumpolarisationsstrom und die „trident“-Bildung, ferner das anormale magnetische Moment des Elektrons. Ein letztes Kapitel ist der Renormalisationstheorie gewidmet. In einem Anhang werden mit den Dirac'schen γ -Matrizen zusammenhängende Fragen behandelt, in einem zweiten die invarianten *D*- und *S*-Funktionen der Quantenelektrodynamik. Den Abschluß bildet eine Sammlung von Aufgaben mit Lösungen.

Auf Eleganz der mathematischen Seite wird in dem Buch besonderer Wert gelegt. Dementsprechend kommen durchwegs die gegenüber Lorentztransformationen kovarianten Formulierungen zur Verwendung. Eine gewisse Vertrautheit mit der Begriffsbildung der Quantentheorie der Wellenfelder ist jedenfalls von Vorteil, wenn man aus der interessanten Lektüre Nutzen ziehen will.

K. Baumann, Wien

Geometrical Mechanics and de Broglie Waves. Von *J. L. Synge*. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Herausgegeben von *G. K. Batschelor* und *H. Bondi*.) Mit Textabb., VI, 167 S. Cambridge: At the University Press. 1954. 25 s. net.

Der Verfasser, bestens bekannt durch seine wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Variationsrechnung, der geometrischen Optik und mathematischen Physik — wohl einer der gründlichsten Kenner der Hamilton'schen Theorie — wendet die Hamilton'sche optische Methode auf die spezielle Relativitätstheorie an, betreibt also sozusagen geometrische Optik im Minkowskischen Raum. Er bezeichnet die so entstehende Mechanik als geometrische Mechanik. Durch Heranziehung einfacher Prinzipien der Wellenmechanik gelingt es ihm, einen Teil der Quantenphysik zu erhalten. Zum Beispiel leitet er die Feinstrukturformel des Wasserstoffatoms und den normalen Zeemaneffekt her. Obwohl vielleicht der Gedanke naheliegend ist, so vorzugehen, ist dies wohl die erste systematische Darstellung. Wenn auch neue physikalische Resultate kaum zu erwarten sind — man muß allerdings mit solchen Prophezeiungen vorsichtig sein — ist es doch sehr interessant, die Gedankengänge des Verfassers zu verfolgen. Gleichzeitig liefert dieses Buch eine ausgezeichnete Einführung in die optische Theorie *Hamilton's*, die sich in die geometrische Theorie der Variationsrechnung einordnet, wie auch der Verfasser im letzten Kapitel zeigt. Die optische Theorie *Hamilton's* ist ja weniger bekannt als die mechanische, *Hamilton-Jacobische* Theorie. Die Darstellung ist sehr klar, wird an vielen Beispielen erläutert und durch viele Raum-Zeitdiagramme unterstützt. Die Lektüre des Buches kann jedem Mathematiker und Physiker empfohlen werden. *E. Hlawka, Wien*

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von *K. Hayashi*. Neudruck. 182 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 12.—.

Die erste Auflage dieser handlichen und beliebten Tafeln erschien 1920 und wurde in dieser Zeitschrift: *Mh. Math.* **32**, 16 (1922) besprochen. Seit Jahren ist das Buch vergriffen. Es ist daher erfreulich, daß nun endlich ein Nachdruck herausgegeben wurde. *N. Hofreiter, Wien*

Vierstellige Logarithmen und Zahlentafeln für den Mathematikunterricht. Von *E. Waage*. 104 S. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1954. S 17.50.

Das Tafelwerk enthält: die dekadischen und natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100 auf 6 Dezimalen; Faktorenzerlegung von 1 bis 1000; 4-stellige Logarithmen der Winkelfunktionen; die zweiten und dritten Potenzen, die auf vier Dezimalen abgekürzten Quadrat- und Kubikwurzeln der ganzen Zahlen von 1 bis 100; die 4. bis 10. Potenzen der (ganzen) Zahlen von 1 bis 9; e^n und e^{-n} für $-4 < n < 4$ mit dem Intervallschritt 0,1; $n!$ und $\binom{n}{k}$ bis $n = 15$, Werte der Hyperbelfunktionen, Tabellen zur politischen Arithmetik; österreichische Sterbetafel 1949/51 und zahlreiche Tabellenwerte aus Physik, Chemie, Astronomie und Geographie.

In diesem reichhaltigen Tafelwerk wurde auf gute Lesbarkeit, auf eine übersichtliche und einprägsame Anordnung der Tafeln und Nebentafeln großer Wert gelegt. Als sehr zweckmäßig werden sich die Kunstharzheftung, die die einzelnen Blätter unlösbar mit dem Leinenrücken verbindet und dadurch ein flaches Ausschlagen des Buches gestattet, und das handliche, schmale Format erweisen.

J. Laub, Wien

Technische Elektrodynamik

Von Dr.-Ing. Dipl.-Ing. Franz Ollendorff

Member I. E. E., Member A. I. E. E., Senior Member I. R. E.

Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa

Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel

Soeben erschienen:

Band II

Innere Elektronik

Teil 1: Elektronik des Einzelelektrons

Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten. Gr.-8°. 1955

Ganzleinen S 582.—, DM 97.—, \$ 23.10, sfr. 99.30

Die moderne Elektronik gleicht in ihren technisch hochentwickelten Geräten einem lebendigen Körper, dessen Sinnesorgane von den Strömungsfeldern freier Elektrizitätsträger gebildet werden. Die Probleme der Erzeugung solcher Elementarteilchen, ihrer Bewegung unter dem Zwange elektrodynamischer Kräfte und die hierbei stattfindenden Energiewandlungen bilden das Arbeitsgebiet der „Inneren Elektronik“, deren theoretische Grundlagen das hier angezeigte Buch darzustellen sucht.

Hauptabschnitte: Langsame Bewegung des Elektrons im elektrischen Felde. — Langsame Bewegung des Elektrons im elektromagnetischen Felde. — Allgemeine klassische Mechanik des Einzelelektrons. — Die elektronenoptischen Systeme der Gaußschen Dioptrik. — Einführung in die Theorie der elektronenoptischen Aberration. — Die Grundlagen der relativistischen Elektronik. — Literaturhinweise. — Namen- und Sachverzeichnis.

In Vorbereitung:

Band II, Teil 2: Elektronik von Kollektiven

Früher erschienen:

Band I

Berechnung magnetischer Felder

Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Gr.-8°. 1952

Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, \$ 15.70, sfr. 67.50

....Die Auswahl der durchgerechneten Aufgaben beweist aufs neue, daß eine der Fähigkeiten des Theoretikers darin bestehen muß, Probleme zu sehen, eine andere, sie in der richtigen Weise zu idealisieren. Mit diesen beiden Gaben vereinigt der Verfasser die weitere hohe Kunst, die notwendigen mathematischen Hilfsmittel in meisterhafter Weise einzusetzen und zu handhaben... Für den theoretisch arbeitenden Ingenieur bildet das Buch eine reiche Fundgrube technisch wichtiger Aufgaben, die in der Konzeption, in der Verarbeitung und in den Ergebnissen in gleicher Weise großes Interesse verdienen. Das deutschsprachige, technisch-wissenschaftliche Schrifttum wird durch dieses Buch wesentlich und wertvoll bereichert...”

ETZ Elektrotechnische Zeitschrift

Zu beziehen durch jede Buchhandlung